Sur les formules de masse de Gell-Mann-Okubo (GMO) et de Coleman-Glashow (CG), 55 ans après.

Jean Pestieau[1]
Centre for Cosmology, Particle Physics and Phenomenology (CP3),
Universite catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

18 mars 2016

La formule de masse de Gell-Mann-Okubo (GMO)[2] a eu, voici 55 ans, une énorme importance non seulement par son caractère explicatif des octets de SU(3) des baryons et des mésons mais aussi par son caractère prédictif du Ω, la particule manquante du décuplet des baryons, découverte en 1964.

La formule de masse GMO, appliquée aux octet et décuplet des baryons[3] s'exprime comme

$$m_B = m_0 + a\,Y + b\,[I(I+1) - Y^2/4] \qquad (1)$$

m_B est la masse du baryon B dans la limite où l'isospin est conservé [m(d) = m(u); électromagnétisme négligé)] mais où m(s) est différent de m(u) et m(d)[4]
Y et I sont respectivement l'hypercharge et l'isospin du baryon B
m_0 est la masse commune de tous les baryons appartenant à un même multiplet avant la brisure de SU(3) de saveur c'est à dire quand m(s) = m(d) = m(u).
Les trois paramètres, m_B, a et b sont évidemment différents pour l'octet et le décuplet des baryons.
De l'équation (1), nous obtenons alors :
pour l'octet des baryons

$$[m(p) + m(n)]/4 + [m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-)]/4 - \{3m(\Lambda) + [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2\}/4 = 0 \qquad (2)$$

et pour le décuplet

$$\begin{aligned} &m(\Omega) - [m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 = \\ &[m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 - [m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/2 = \\ &[m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/2 - [m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 \end{aligned} \qquad (3)$$

Avec les valeurs expérimentales de l'octet des baryons, nous trouvons que le membre de gauche de l'équation (2) est égal à - 6.51 ± 0.05 MeV.

L'équation (2) est satisfaite dans la limite où la symétrie d'isospin est conservée. Notre but est maintenant de décrire comment tenir compte de la brisure de l'isospin en modifiant l'équation (1).

---

1 jean.pestieau@uclouvain.be
2 M. Gell-Mann, unpublished, 1961. http://www.osti.gov/accomplishments/documents/fullText/ACC0113.pdf ; S.Okubo, Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **27**, 949 (1962); M. Gell-Mann and Y Ne'eman, *The Eightfold Way*, W.A. Benjamin,Inc., New-York (1964)
3 Les valeurs expérimentales des masses des baryons rencontrées dans cette note proviennent de : K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014) et particulièrement de http://pdg.lbl.gov/2015/tables/rpp2015-sum-baryons.pdf .
4 Au niveau des quarks, la brisure de SU(3)-saveur est proportionnelle à [m(d) + m(u) – 2 m(s)], tandis que la brisure de SU(2)-isospin est proportionnelle à [m(u) – m(d)].

Nous proposons de remplacer l'équation (1) par

$$m_B = \{m_0 + a\, Y + b\, [I(I + 1) – Y^2/4]\} + \{c\, I_3 + d\, I_3.Y\} + e\, I_3^2 + f\, .Y^2/4 \quad (4)$$

Le terme $\{m_0 + a\, Y + b\, [I(I + 1) – Y^2/4]\}$ est le terme original de la formule de masse GMO. tandis que le terme $\{c\, I_3 + d\, I_3.Y\}$ qui brise l'isospin, est à l'origine de la formule de masse de Coleman-Glashow[5] (CG).

Comme nous l'argumenterons bientôt, le terme c I_3 est dû essentiellement à la différence de masse entre m(u) et m(d).

Venons-en aux termes d $I_3.Y$, e I_3^2 et f $Y^2/4$. Ces termes sont essentiellement dus à la violation de l'isospin à travers les corrections électromagnétiques. Celles-ci, du point de vue du groupe SU (2) de l'isospin, sont de la forme Q x Q où Q est l'opérateur de charge électrique [$Q = I_3 + Y/2$]. Ainsi $Q \times Q = I_3 \times I_3 + I_3.Y \times I_3.Y + Y/2 \times Y/2$. D'où les termes e I_3^2, d $I_3.Y$. et f $Y^2/4$.[6]

Examinons la signification des paramètres m_0, a, b, c, d, e, f dans l'équation (4)

$$m_0 = m(\Lambda) = 1115.683 \pm 0.006 \text{ MeV} \quad (5)$$

$$a = [m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-)]/4 - [m(p) + m(n)]/4 = 189.68 \pm 0.05 \text{ MeV} \quad (6)$$

$$b = [m(\Sigma^\circ) - m(\Lambda)]/2 = 38.480 \pm 0.012 \text{ MeV} \quad (7)$$

$$c = [m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-)]/2 = - 4.04 \pm 0.04 \text{ MeV} \quad (8)$$

$$c – d = m(p) – m(n) = - 1.2933322 \pm 0.0000004 \text{ MeV} \quad (9)$$

$$c + d = m(\Xi^\circ) - m(\Xi^-) = - 6.85 \pm 0.21 \text{ MeV} \quad (10)$$

$$e = [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 – m(\Sigma^\circ) = 0.77 \pm 0.05 \text{ MeV} \quad (11)$$

$$f = m(p) + m(n) + m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-) - 3m(\Lambda) - [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 = - 26.05 \pm 0.21 \text{ MeV} \quad (12)$$

Nous voyons que l'équation (12), qui rend compte de la brisure de la formule GMO, ne dépend que du paramètre f et aucunement des coefficients c, d et e apparaissant dans l'équation (4). A comparer à $3.\alpha.m(\Sigma^\circ) = 26.12$ MeV, avec $\alpha = 1/137.036$, la constante de structure fine. Ceci indique l'ordre de grandeur de la brisure de la formule de masse GMO.

Des équations (8), (9) et (10), découle la formule de masse Coleman-Glashow (CG) pour l'octet des baryons:

$$m(n) - m(p) + m(\Xi^-) - m(\Xi^\circ) = m(\Sigma^-) - m(\Sigma^+) \quad (13)$$

en accord impressionnant avec les données expérimentales.
Nous observons[7] que la contribution électromagnétique à la différence de masse [$m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-)$] est petite par rapport à la contribution due à la violation de l'isospin au niveau des masses des quarks u et d, puisque la charge électrique en valeur absolue est la même pour Σ^- et Σ^+. Cela a été quantitativement vérifié en référence 7. Donc en première

5 S.Coleman and S.L. Glashow, Phys.Rev. Lett., **6**, 423 (1961); voir aussi P.A. Carruthers, *Introduction to unitary symmetry*, Interscience Publishers (1966)

6 Naïvement, on pourrait s'attendre que e.f/4 soit de l'ordre de grandeur de d² en valeur absolue. C'est le cas puisque - e.f/ 4 = 7.7 et d² = 5.0

7 Sz. Borzanyi *et al.*, http://arxiv.org/pdf/1406.4088v2.pdf , 7 April 2015; voir particulière Fig.2 et Table 1

approximation, $[m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-)]$ est proportionnelle à $[m(u) – m(d)]$. La formule CG est essentiellement un test de la brisure de l'isospin dû à la différence de masse entre les quarks u et d et non pas au secteur électromagnétique.

Nous ne pouvons pas calculer f car pour cela, il faut non seulement connaître la différence de masse dû à l'électromagnétisme entre m(p) et m(n) qui est essentiellement égale à 2d mais aussi la self masse électromagnétique du proton qui est égale à $e/4 – d/2 + f/4$, ce qui est un problème non résolu.

Dans la limite où la symétrie d'isospin est respectée,

$$c = d = e = f = 0 \tag{14}$$

et l'équation (4) se réduit à l'équation (1) tandis que l'équation (12) se réduit à l'équation (2), la formule GMO pour l'octet des baryons.

A partir de l'équation (4), ce que nous avons fait pour l'octet des bayons peut être étendu au décuplet des baryons[8], où les données expérimentales sont beaucoup moins précises. Les équations (3) deviennent, tenant compte des corrections dues à la brisure d'isospin :

$$m(\Omega) – [m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})] + [m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/2 = (e + f)/2 = - 9.35 \pm 0.81 \text{ MeV} \tag{15}$$

$$[m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 – [m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})] + [m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 = (-e + f)/2 \tag{16}$$

desquels nous déduisons

$$m(\Omega) – [m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 - [m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/2 + [m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 = f \tag{17}$$

On calcule, à partir de l'équation(4)

$$e = [m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/2 – m(\Sigma^{*\circ}) = 1.3 \pm 1.1 \text{ MeV} \tag{18}$$

$$e = [m(\Delta^-) + m(\Delta^{++}) - m(\Delta^\circ) - m(\Delta^+)]/4 \tag{19}$$

$$m(\Delta^\circ) - m(\Delta^+) + m(\Xi^{*-}) - m(\Xi^{*\circ}) = m(\Sigma^{*-}) - m(\Sigma^{*+}) \tag{20}$$

ce qui est la formule de masse CG pour le décuplet et

$$m(\Delta^-) - m(\Delta^{++}) = 3[m(\Delta^\circ) - m(\Delta^+)]. \tag{21}$$

A partir des équations (22) et (23), nous prédisons :

$$m(\Delta^\circ) - m(\Delta^+) = [m(\Delta^-) - m(\Delta^{++})]/3 = 1.2 \pm 0.9 \text{ MeV}. \tag{22}$$

Par manque de données expérimentales, il n'est pas possible de tester les équations (19) et (22) .
A partir des équations (15) et (18), nous obtenons

8 Bien entendu, les paramètres m_0, a, b, c d, e, f ont des valeurs différentes pour le décuplet et pour l'octet.

$f = -17.4 \pm 2.0$ MeV[9] (23)

Alors à partir des équations (17) et (23), nous obtenons

$[m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 = 1229 \pm 2$ MeV

A comparer[10] à

$m(\Delta)$ (en moyenne) = 1232 ± 1 MeV.

Le problème essentiel à résoudre, c'est de trouver le moyen de dériver f aussi bien pour l'octet que pour le décuplet . Et pas seulement s'en tenir à une estimation qualitative.

Annexe

Illustration des formules de masses GMO et CGO dans un modèle naïf des quarks

Considérons les baryons de l'octet et du décuplet dans un modèle de quarks « constituants » dont les masses sont dénotées par M(i) pour celles de l'octet et par M'(i) pour celles du décuplet.

$m(\Xi^-) = M_0 + M(d) + 2M(s)$

$m(\Xi^\circ) = M_0 + M(u) + 2M(s)$

$m(\Sigma^-) = M_0 + 2M(d) + M(s)$

$m(\Sigma^\circ) = M_0 + M(u) + M(d)] + M(s)$

$m(\Sigma^+) = M_0 + 2M(u) + M(s)$

$m(\Lambda) = M_0 + M(u) + M(d) + M(s)$

$m(n) = M_0 + M(u) + 2M(d)$

$m(p) = M_0 + 2M(u) + M(d)$

$m(\Omega) = M'_0 + 2M(u)' + 3M(s)'$

$m(\Xi^{*-}) = M'_0 + M(d)' + 2M(s)'$

$m(\Xi^{*\circ}) = M'_0 + M(u)' + 2M(s)'$

$m(\Sigma^{*-}) = M'_0 + 2M(d)' + M(s)'$

$m(\Sigma^{*\circ}) = M'_0 + M(u)' + M(d)' + M(s)'$

$m(\Sigma^{*+}) = M'_0 + 2M(u)' + M(s)'$

$m(\Delta^-) = M'_0 + 3M(d)'$

9 Il est amusant d'observer que $f/4 \approx [m(\Sigma^{*+}) - m(\Sigma^{*-})] = -4.4 \pm 0.4$ MeV. C'est une coïncidence car nous avons argumenté que f était principalement dû aux corrections radiatives d'origine électromagnétique et non pas à la différence de masse entre u et d.

10 Voir réf.3

$m(\Delta^{\circ}) = M'_0 + 2M(d)' + M(u)'$

$m(\Delta^{+}) = M'_0 + M(d)' + 2M(u)'$

$m(\Delta^{++}) = M'_0 + 3M(u)'$

Ces expressions des masses des baryons exprimées en termes des quarks <<constituants>> satisfont automatiquement les formules de masse GMO et CG : équations (2), (3), (13), (22) et (23).

L'équation (4), en termes des masses des quarks « constituants » s'écrit :

$m_0 = M_0 + M(u) + M(d) + M(s)$

$a = M(s) – [M(u) + M(d)]/2$

$c = M(u) – M(d)$

$b= d= e = f = 0$

aussi bien pour l'octet que pour le décuplet.

La détermination de b, d, e et f vont au-delà du simple modèle des quarks utilisé dans cette note.