Sur les formules de masse de Gell-Mann-Okubo (GMO) et de Coleman-Glashow (CG), 55 ans après.

Jean Pestieau[1]

Centre for Cosmology, Particle Physics and Phenomenology (CP3),
Universite catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

18 mars 2016 (révisé 26 avril 2016)

La formule de masse de Gell-Mann-Okubo (GMO)[2] a eu, voici 55 ans, une énorme importance non seulement par son caractère explicatif des octets de SU(3) des baryons et des mésons mais aussi par son caractère prédictif du Ω, la particule manquante du décuplet des baryons, découverte en 1964.

La formule de masse GMO, appliquée aux octet et décuplet des baryons[3] s'exprime comme

$$m_B = m_0 + a\,Y + b\,[I(I + 1) – Y^2/4] \qquad (1)$$

m_B est la masse du baryon B dans la limite où l'isospin est conservé [m(d) = m(u); électromagnétisme négligé)] mais où m(s) est différent de m(u) et m(d)[4],
Y et I sont respectivement l'hypercharge et l'isospin du baryon B,
m_0 est la masse commune de tous les baryons appartenant à un même multiplet avant la brisure de SU(3)-saveur c'est à dire quand m(s) = m(d) = m(u).
Les trois paramètres, m_B, a et b sont évidemment différents pour l'octet et le décuplet des baryons.
Ici, l' opérateur de masse qui brise la symétrie de SU(3)-saveur est supposé avoir les propriétés de transformation sous SU(3) identique à celle de l'opérateur Y.

De l'équation (1), nous obtenons alors :
pour l'octet des baryons

$$[m(p) + m(n)]/4 + [m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-)]/4 - \{3m(\Lambda) + [m(\Sigma^\circ) + m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/3\}/4 = 0 \qquad (2)$$

et pour le décuplet

$$\begin{aligned} &m(\Omega) – [m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 = \\ &[m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 – [m(\Sigma^{*\circ}) + m(\Sigma^{*+}) + m(\Sigma^{*-})]/3 = \\ &[m(\Sigma^{*\circ}) + m(\Sigma^{*+}) + m(\Sigma^{*-})]/3 – [m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 \end{aligned} \qquad (3)$$

Avec les valeurs expérimentales de l'octet des baryons, nous trouvons que le membre de gauche de l'équation (2) est égal à - 6.4 MeV.

---

1 jean.pestieau@uclouvain.be

2 M. Gell-Mann, unpublished, 1961. http://www.osti.gov/accomplishments/documents/fullText/ACC0113.pdf ; S.Okubo, Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **27**, 949 (1962); M. Gell-Mann and Y Ne'eman, *The Eightfold Way*, W.A. Benjamin,Inc., New-York (1964)

3 Les valeurs expérimentales des masses des baryons rencontrées dans cette note proviennent de : K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014) et particulièrement de http://pdg.lbl.gov/2015/tables/rpp2015-sum-baryons.pdf .

4 Au niveau des quarks, la brisure de SU(3)-saveur est proportionnelle à [m(d) + m(u) – 2 m(s)], tandis que la brisure de SU(2)-isospin est proportionnelle à [m(u) – m(d)].

Les équations (2) et (3) sont bien sûr approximatives.

Nous proposons une formule de masse modifiée de GMO - dans le cas de l'octet - qui tient compte plus finement de la brisure de SU(3) ainsi que de celle de l'isospin et qui est en parfait accord avec l'expérience :

$$m(p) + m(n) + m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-) = 10m(\Lambda)/3 + [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/3 \qquad (4)$$

Le membre de gauche de l'équation (4) est égale à 4514.41 ± 0.21 MeV tandis que le membre de droite est égal à 4514.55 ± 0.03 MeV

L'équation (4) peut se réécrire comme

$$m(p) + m(n) + m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-) = 3m(\Lambda) + [m(\Sigma^\circ) + m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/3 - [m(\Sigma^\circ) - m(\Lambda)]/3 \qquad (5)$$

avec $[m(\Sigma^\circ) - m(\Lambda)]/3 = 25.653 \pm 0.008$ MeV (6)

La différence entre les équations (2) et (4) est manifestée explicitement par les équations (5) et (6). Contrairement à, par exemple, la différence de masse entre Σ^+ et p, la différence de masse entre Σ° et Λ ne peut être directement due à une différence de masse entre les quarks puisque Λ et Σ° ont le même contenu de quarks de valence. Elle provient des interactions entre quarks et gluons.

Nous allons examiner cela de plus près.

Utilisons une formule plus générale que la formule de GMO donnée dans l'équation (1):

$$m_B = \{m_0 + a\,Y + b\,[I(I + 1) - Y^2/4]\} + \{c\,I_3 + d\,I_3.Y\} + e\,I_3^2 + f\,.Y^2/4 \qquad (7)$$

Le terme $\{m_0 + a\,Y + b\,[I(I + 1) - Y^2/4]\}$ est le terme original de la formule de masse GMO. tandis que le terme $\{c\,I_3 + d\,I_3.Y\}$ qui brise l'isospin, est à l'origine de la formule de masse de Coleman-Glashow[5] (CG).

La différence de masse, $\{[m(p) + m(n)] - [m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-)]\}/4 = a = -189.68 \pm 0.05$ MeV, est proportionnelle à la différence de masse entre quarks $\{[m(u) + m(d)]/2 - m(s)\}$

Comme nous argumenterons bientôt, le terme $c\,I_3$ est dû essentiellement à la différence de masse entre m(u) et m(d) avec $c = [m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-)]/2 = -4.04 \pm 0.04$ MeV

Le terme $f\,Y^2/4$ est en premier lieu dû à ces effets de brisure de SU(3)-saveur qui ne se transforment pas comme l'opérateur Y (hypothèse de Gell-Mann : dominance de la représentation 8 dans le terme de masse)[6] et ne sont donc pas pris en compte par $b\,[I(I + 1) - Y^2/4]$. Le terme $f\,Y^2/4$ provient d'un opérateur qui se transforme comme $Y \otimes Y$. Celui-ci contient non seulement les représentations de SU(3) de dimension 8 mais également celle de dimension 27 [$8 \otimes 8 = 27 + 10 + 10^* + 8$ (symétrique) + 8 (antisymétrique) + 1]

Venons-en aux termes $d\,I_3.Y$, $e\,I_3^2$ et en partie $f\,Y^2/4$. Ces termes sont dus à la violation de l'isospin à travers les corrections électromagnétiques. Celles-ci, du point de vue du groupe

5 S.Coleman and S.L. Glashow, Phys.Rev. Lett., **6**, 423 (1961).
6 voir par exemple, P.A. Carruthers, *Introduction to unitary symmetry*, Interscience Publishers (1966)

SU(3)-saveur, sont de la forme $Q \otimes Q$ où Q est l'opérateur de charge électrique [$Q = I_3 + Y/2$]. Ainsi $Q \otimes Q = I_3 \otimes I_3 + I_3.Y \otimes I_3.Y + Y/2 \otimes Y/2$. D'où la contribution (d'origine électromagnétique) aux termes e I_3^2, d $I_3.Y$ et f $Y^2/4$.

Nous observons[7] que la contribution électromagnétique à la différence de masse [$m(\Sigma^+)$ - $m(\Sigma^-)$] est petite par rapport à la contribution due à la différence de masse entre les quarks u et d, se rappelant que la charge électrique en valeur absolue est la même pour Σ^- et Σ^+. Cela a été quantitativement vérifié en référence 7. Donc en bonne approximation, [$m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-)$] est proportionnelle à [$m(u) – m(d)$]. La formule de masse CG, qui est en accord remarquable avec l'expérience,

$$m(n) - m(p) + m(\Xi^-) - m(\Xi^\circ) = m(\Sigma^-) - m(\Sigma^+) = 8.08 \pm 0.08 \text{ MeV} \quad (8)$$

est essentiellement un test de la brisure de l'isospin due à la différence de masse entre les quarks u et d et non pas due au secteur électromagnétique.

L'équation (4) est obtenue à condition que

$$f = - (e + 2b)/3 \quad (9)$$

sachant que

$$e = [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 – m(\Sigma^\circ) = 0.77 \pm 0.05 \text{ MeV}$$

est d'origine électromagnétique et

$$b = [m(\Sigma^\circ) - m(\Lambda)]/2 = 38.480 \pm 0.012 \text{ MeV}$$

provenant de la dynamique de QCD qui est à l'origine de la différence de masse entre Σ° et Λ.

De l'équation (7), nous obtenons

$$f = m(p) + m(n)+ m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-) - 3m(\Lambda) - [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 = - 26.05 \pm 0.21 \text{ MeV} \quad (10)$$

Si f=o, nous retrouvons le formule de masse de GMO.

Avec

$$f = -(e + 2b)/3 = - \{ [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 - m(\Sigma^\circ) + (m(\Sigma^\circ) – m(\Lambda))\}/3$$

$$= - \{[m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 – m(\Lambda)\}/3 = - 25.91 \pm 0.02 \text{ MeV} \quad (11)$$

la comparaison entre les équations (10) et (11) montre que f est bien décrit par deux contributions, l'une petite (e), électromagnétique et l'autre (2b), provenant de QCD.

A partir des équations (10) et (11), nous obtenons

$$m(p) + m(n)+ m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-) = 3m(\Lambda) - [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 - \{[m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 – m(\Lambda)\}/3 \quad (12)$$

7 Sz. Borzanyi *et al.*, http://science.sciencemag.org/content/347/6229/1452 , http://arxiv.org/abs/1406.4088 ; voir particulièrement Fig.2 et Table 1

équivalente à l'équation (4).
Récapitulons ici les expressions des paramètres m_0, a, b, c, d, e, f de l'équation (7) en termes des masses de l'octet

$m_0 = m(\Lambda) = 1115.683 \pm 0.006$ MeV (13)

$-a = [m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-)]/4 - [m(p) + m(n)]/4 = 189.68 \pm 0.05$ MeV (14)

$b = [m(\Sigma^\circ) - m(\Lambda)]/2 = 38.480 \pm 0.012$ MeV (15)

$c = [m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-)]/2 = - 4.04 \pm 0.04$ MeV (16)

$c + d = m(p) – m(n) = - 1.2933322 \pm 0.0000004$ MeV (17)

$c - d = m(\Xi^\circ) - m(\Xi^-) = - 6.85 \pm 0.21$ MeV (18)

$e = [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 – m(\Sigma^\circ) = 0.77 \pm 0.05$ MeV (19)

$f = m(p) + m(n) + m(\Xi^\circ) + m(\Xi^-) - 3m(\Lambda) - [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)]/2 = -26.05 \pm 0.21$ MeV (10)

Nous voyons que l'équation (10), qui rend compte de la brisure de la formule GMO, ne dépend que du paramètre f.

A partir de l'équation (7), ce que nous avons fait pour l'octet des bayons peut être étendu au décuplet des baryons[8], où les données expérimentales sont beaucoup moins précises. Les équations (3) deviennent:

$m(\Omega) – [m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})] + [m(\Sigma^{*\circ}) + m(\Sigma^{*+}) + m(\Sigma^{*-})]/3 = (e/3 + f)/2 =$
-9.8 ± 0.8 MeV (20)

$[m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 – 2[m(\Sigma^{*\circ}) + m(\Sigma^{*+}) + m(\Sigma^{*-})]/3 +$
$[m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 = (e/3 + f)/2$ (21)

$m(\Omega) – [m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 - [m(\Sigma^{*\circ}) + m(\Sigma^{*+}) + m(\Sigma^{*-})]/3 +$
$[m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 = e/3 + f$ (22)

Soustrayant l'équation (20) de l'équation (21), nous déduisons

$[m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 = 1226 \pm 1.5$ MeV (23)

indépendamment des paramètres e et f.
A comparer[9] à $m(\Delta)$ qui est estimé en moyenne être égal à 1232 ± 1 MeV.

A partir de l'équation(7), nous obtenons également

$e = [m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/2 – m(\Sigma^{*\circ}) = 1.3 \pm 1.1$ MeV (24)

$e = [m(\Delta^-) + m(\Delta^{++}) - m(\Delta^\circ) - m(\Delta^+)]/4$ (25)

$m(\Delta^\circ) - m(\Delta^+) + m(\Xi^{*-}) - m(\Xi^{*\circ}) = m(\Sigma^{*-}) - m(\Sigma^{*+})$ (26)

$m(\Delta^-) - m(\Delta^{++}) = 3[m(\Delta^\circ) - m(\Delta^+)]$. (27)

---

8 Bien entendu, les paramètres m_0, a, b, c d, e, f ont des valeurs différentes pour le décuplet et pour l'octet.
9 Voir réf.3

A partir des équations (26) et (27), nous prédisons :

$m(\Delta^{\circ}) - m(\Delta^{+}) = [m(\Delta^{-}) - m(\Delta^{++})]/3 = 1.2 \pm 0.9$ MeV. (28)

sachant que

$m(\Xi^{*-}) - m(\Xi^{*\circ}) = 3.2 \pm 0.7$ MeV

et

$m(\Sigma^{*-}) - m(\Sigma^{*+}) = 4.4 \pm 0.6$ MeV

Des équations (20) et (24), nous obtenons

$f = -20.0 \pm 1.2$ MeV. (29)

Annexe 1

Illustration des formules de masses GMO et CGO dans un modèle naïf des quarks

Considérons les baryons de l'octet et du décuplet dans un modèle de quarks « constituants » dont les masses sont dénotées par M(i) pour celles de l'octet et par M'(i) pour celles du décuplet.

$m(\Xi^{-}) = M_0 + M(d) + 2M(s)$

$m(\Xi^{\circ}) = M_0 + M(u) + 2M(s)$

$m(\Sigma^{-}) = M_0 + 2M(d) + M(s)$

$m(\Sigma^{\circ}) = M_0 + M(u) + M(d) + M(s)$

$m(\Sigma^{+}) = M_0 + 2M(u) + M(s)$

$m(\Lambda) = M_0 + M(u) + M(d) + M(s)$

$m(n) = M_0 + M(u) + 2M(d)$

$m(p) = M_0 + 2M(u) + M(d)$

$m(\Omega) = M'_0 + 2M(u)' + 3M(s)'$

$m(\Xi^{*-}) = M'_0 + M(d)' + 2M(s)'$

$m(\Xi^{*\circ}) = M'_0 + M(u)' + 2M(s)'$

$m(\Sigma^{*-}) = M'_0 + 2M(d)' + M(s)'$

$m(\Sigma^{*\circ}) = M'_0 + M(u)' + M(d)' + M(s)'$

$m(\Sigma^{*+}) = M'_0 + 2M(u)' + M(s)'$

$m(\Delta^-) = M'_0 + 3M(d)'$

$m(\Delta^\circ) = M'_0 + 2M(d)' + M(u)'$

$m(\Delta^+) = M'_0 + M(d)' + 2M(u)'$

$m(\Delta^{++}) = M'_0 + 3M(u)'$

Ces expressions des masses des baryons exprimées en termes des quarks « constituants » satisfont automatiquement les formules de masse GMO et CG. :

L'équation (7) peut s'exprimer en termes des masses des quarks « constituants », avec

$m_0 = M_0 + M(u) + M(d) + M(s)$ (30)

$-a = M(s) – [M(u) + M(d)]/2$ (31)

$c = M(u) – M(d)$ 32)

$b= d= e = f = 0$ (33)

aussi bien pour l'octet que pour le décuplet, remplaçant M par M'.

La détermination de b, d, e et f vont au-delà du simple modèle de quarks utilisé dans cet annexe.

Annexe 2

Remarque sur les paramètres du décuplet.

A partir de l'équation (7), nous pouvons écrire

$m(\Omega) – [m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 = (-a - 3b/2) – e/4 + 3f/4$ (34)

$[m(\Xi^{*\circ}) + m(\Xi^{*-})]/2 – [m(\Sigma^{*\circ}) + m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/3 = (-a - 3b/2) - 5e/12 + f/4$ (35)

$[m(\Sigma^{*\circ}) + m(\Sigma^{*-}) + m(\Sigma^{*+})]/3 – [m(\Delta^-) + m(\Delta^\circ) + m(\Delta^+) + m(\Delta^{++})]/4 =$

$(-a - 3b/2) - 7e/4 – f/4$ (36)

Nous voyons que contrairement au cas de l'octet, il n'est pas possible de déterminer a et b indépendamment l'un de l'autre dans le décuplet. Seule la combinaison (-a - 3b/2) peut être déterminée. A partir des équations (20), (24) et(35), nous obtenons

$(-a – 3b/2) = 154.4 \pm 0.9$ MeV (37)

Supposons maintenant que soit respectée, pour le décuplet, la condition

$f = - (e + 2b)/3$

[comme nous avons supposé pour l'octet voir l'équation (9)]. Alors, utilisant les équations (20) et (24), nous obtenons, pour le décuplet,

$b = 29.4 \pm 2.4$ MeV [pour l'octet, $b = 38.480 \pm 0.012$ MeV, voir l'équation(15)]

et

$-a = 198.5 \pm 3.7$ MeV , [pour l'octet, $-a = 189.68 \pm 0.05$ MeV, voir l'équation(14)]

à partir de l'équation (38).