UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTE DES SCIENCES

CONVERGENCE

en

TOPOLOGIE GENERALISEE

Mémoire présenté par

Dominique Meeùs

en vue de l'obtention
du grade de Licencié en
Sciences mathématiques

1964-1965

LOUVAIN

1965

INTRODUCTION

Notre intention centrale était d'édifier une théorie générale de la convergence, généralisant la convergence des bases de filtre, et d'y greffer une convergence des fonctions de manière à retrouver les résultats de Mahlon M. Day sur ce sujet. Plus précisément, il s'agissait d'étudier les relations d'une notion de convergence avec les notions de voisinages, d'intérieur et d'adhérence de la topologie mais privées de certains de leurs axiomes. Nous avons été amenés alors à définir sur la base de ces notions des espaces plus généraux que les espaces topologiques et à étudier leur structure. Nous avons ensuite étudié la possibilité d'utiliser d'autres concepts initiaux : l'ensemble dérivé et les ouverts, arrivant ainsi, sans pour autant utiliser tous les axiomes habituels, à organiser presque tout l'arsenal des concepts de base avec les définitions et les relations qui les lient l'un à l'autre en topologie.

Nous tenons à remercier ici Monsieur Jacques BOEL qui nous a aidé de ses conseils tout au long de ce travail et qui en particulier nous a encouragé à définir et à étudier les produits et les quotients des structures que nous avions décrites.

TABLE DES MATIERES

0. NOTATIONS ET CONVENTIONS.-

Les notations sont pour la plupart les notations habituelles; quelques exceptions suivent.

$\subseteq$ est l'inclusion au sens habituel (inclusion réflexive). Nous réservons $\subset$ pour l'inclusion stricte (irréflexive).

$\sim$ est l'opérateur de complémentation. $\sim X \underset{\text{déf}}{=} \{x \mid x \notin X\}$ est le complémentaire de X. $X \sim Y \underset{\text{déf}}{=} X \cap \sim Y$ est le complémentaire de Y relativement à X ou encore, si $Y \subseteq X$, la différence de X et de Y Nous nous permettons l'abus de langage qui consiste à utiliser $\sim X$ pour désigner le complémentaire de X relativement à un ensemble (le plus souvent E) fixé par le contexte.

$\bigcup$ est un opérateur défini pour toutes les classes d'ensembles. $\bigcup \mathfrak{A} \underset{\text{déf}}{=} \{x \mid \exists A \in \mathfrak{A} : x \in A\}$ remplace la notation $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ plus habituelle.

$\bigcap$ est défini semblablement par $\bigcap \mathfrak{A} \underset{\text{déf}}{=} \{x \mid \forall A \in \mathfrak{A},\ x \in A\}$. De même $\times \{E_i \mid i \in I\}$ remplace $\prod_{i \in I} E_i$ pour le produit cartésien.

Le symbole def placé en dessous de de = ou de $\Longleftrightarrow$ indique que l'égalité ou l'équivalence constitue une définition.

Les expressions seront soulignées là où elles sont définies.

Pour les applications, une écriture telle que, par exemple :

$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(E) : \mathfrak{A} \rightsquigarrow L\mathfrak{A} \underset{\text{déf}}{=} \{x \mid \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathfrak{A}\}$

définit l'application L en fournissant les informations suivantes :

L est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E)$;

la valeur de L pour $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ sera notée $L\mathfrak{A}$ et est égale (par définition) à $\{x \mid \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathfrak{A}\}$.

Si f est une fonction, dom f est son domaine et Imf son image, c'est-à-dire f (Dom f).

Soient f et g deux applications : $D \longrightarrow E$, E étant muni d'une relation transitive $<$. On dira que f domine g si et seulement si $\forall x \in E$, $f(x) > g(x)$ et on écrira $f > g$.

On appellera constante a : $D \longrightarrow E$ l'application $f : D \longrightarrow E$: $x \curvearrowright f(x) \underset{\text{déf}}{=} a$ $(a \in E)$.

Pour les parenthèses nous adoptons la convention suivante : une expression telle que $fX \cap Y$ veut dire $(fX) \cap Y$ (effectuer d'abord l'opération à un argument). Au contraire $f(X \cap Y)$ ne sera jamais écrit sans parenthèses.

Derrière $\forall$ et $\exists$ nous avons tenté de remplacer autant que possible les parenthèses par une ponctuation en accord avec la grammaire. Les deux points (:) derrière $\exists$ doivent se lire "tel que". Exemples, $\forall x \in E$, $x = x$ et $\exists x \in E : x = x$.

(3) ou théorème 7, par exemple, renvoient à la proposition (3) ou au théorème 7 du paragraphe en cours. Sinon on indiquera le chapitre et le paragraphe; par exemple : théorème 2-2.9

$\blacksquare$ indique la fin d'une démonstration.

Une ligne horizontale indique un changement dans les hypothèses générales (comme par exemple : E est un espace m-topologique) qui apparaissent dans le texte.

Contrairement à l'usage, nous appellerons topologie sur E, non pas la famille des ouverts, mais bien l'application $\mathcal{V}$: $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : x \curvearrowright \mathcal{V}(x)$ qui associe à chaque point de l'espace topologique le système $\mathcal{V}(x)$ de tous ses voisinages. Ceci pour comparer facilement une topologie avec "les general-topologies" que nous définirons au chapitre I. Pour les axiomes concernant les voisinages en topologie nous renvoyons à KELLEY [2], Chap. I, Problem B ou à BOURBAKI [I].

CHAPITRE I - ESPACE general-TOPOLOGIQUE.-

§1. ESPACE general-TOPOLOGIQUE.

DEFINITION 1 : Nous appellerons espace general-topologique un couple $(E, \mathcal{V})$ où E est un ensemble et $\mathcal{V}$ une application : $E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
Une telle application sera dite general-topologie sur E.

Un espace general-topologique est donc un ensemble "muni" d'une general-topologie.

Nous avons préféré l'expression "general-topologique" quoique plus barbare, à une expression telle que "topologique généralisé". D'abord parce qu'un espace general-topologique n'est pas un espace topologique, contrairement à ce que "topologique généralisé" pourrait faire penser (au moins formellement; le sens du mot "généralisé" préviendrait d'ailleurs en fait toute ambiguïté). Ensuite, et surtout, parce que ce serait fixer indûment le mot "généralisé" dans une acception trop restreinte - il existe d'autres généralisations de la topologie, par exemple les généralisations unifiées des structures topologiques, uniformes et de proximité par Császár et par Doïčinov entre autres.

VOISINAGES, INTERIEUR ET ADHERENCE

Soit $(E,\mathcal{V})$ un espace general-topologique. La general-topologie $\mathcal{V}$ sera dite aussi fonction de voisinage de l'espace $(E,\mathcal{V})$. Sa valeur en un point x de E sera notée $\mathcal{V}(x)$.

DEFINITION 2 : 1°) Une partie V de E est un voisinage de x si, et seulement si $V\in\mathcal{V}(x)$.

2°) L'intérieur d'une partie X de E est l'ensemble des points de E dont X est un voisinage. Il sera noté iX.

3°) L'adhérence d'une partie X de E est l'ensemble des points de E dont le complémentaire de X n'est pas un voisinage. Il sera noté aX.

L'application $i : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : X \curvearrowright iX$ sera dite fonction d'intérieur de l'espace $(E,\mathcal{V})$. L'application $a : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : X \curvearrowright aX$ sera dite fonction d'adhérence de l'espace $(E,\mathcal{V})$.

Ces définitions entraînent immédiatement que

$$V\in\mathcal{V}(x) \iff x\in iV \qquad (1)$$

et

$$V\in\mathcal{V}(x) \iff x\notin a{\sim}V \qquad (2)$$

THEOREME 1 : Les fonctions d'intérieur et d'adhérence satisfont aux relations suivantes :

$$i = {\sim}a{\sim} \qquad (3)$$

et

$$a = {\sim}i{\sim} \qquad (4)$$

Démonstration. $x \notin a \sim X$ équivaut par (2) à $X \in \mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire, par (1), $x \in iX$. ∎

INTERIEUR ET ADHERENCE COMME CONCEPT INITIAL DE LA STRUCTURE D'ESPACE general-TOPOLOGIQUE.-

Les propositions (1) et (2) permettent de caractériser la fonction de voisinage d'un espace general-topologique à partir de la fonction d'intérieur ou de la fonction d'adhérence de cet espace. En fait si f est une application arbitraire de l'ensemble des parties de E, dans soi-même l'application $\mathcal{V}: E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$: $x \curvearrowright \mathcal{V}(x)$ où

$$\mathcal{V}(x) =_{\text{déf}} \{V \mid x \notin f \sim V\} \qquad (5)$$

est une general-topologie sur E. Si a est la fonction d'adhérence de l'espace $(E, \mathcal{V})$ on a $a = f$; en effet $x \in aX$ équivaut par (2) à $\sim X \notin \mathcal{V}(x)$, soit encore $x \in f \sim\sim X$ par (5).
Ainsi il est possible d'associer à une application arbitraire $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une general-topologie $\mathcal{V}$ sur E telle que la fonction d'adhérence de l'espace $(E, \mathcal{V})$ soit précisément f.
Cette general-topologie est évidemment unique puisque si f est aussi la fonction d'adhérence de l'espace $(E, \mathcal{V}')$ on a, par (2), $\mathcal{V}'(x) = \{V \mid x \notin f \sim V\}$ et donc, par (5), $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$.
D'autre part, la fonction d'intérieur de l'espace $(E, \mathcal{V})$ peut être définie directement à partir de f comme étant $\sim f \sim$.

On pourrait de même partir d'une fonction arbitraire $g : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ et construire un espace general-topologique dont g soit la fonction d'intérieur. Plus formellement : considérons les ensembles :

$$\mathcal{V} \underset{\text{déf}}{=} \{ \mathcal{V} \mid \mathcal{V} : E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \} \tag{6}$$

et $$\mathcal{F} \underset{\text{déf}}{=} \{ f \mid f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \} \tag{7}$$

et les applications :

$$\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} : i \curvearrowright \lambda(i) \underset{\text{déf}}{=} \sim i \sim , \tag{8}$$

$$\lambda' : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} : a \curvearrowright \lambda'(a) \underset{\text{déf}}{=} \sim a \sim ; \tag{9}$$

$$\mu : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{F} : \mathcal{V} \curvearrowright \mu(\mathcal{V})$$
$$\text{où } \mu(\mathcal{V}) : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : X \curvearrowright \{ x \mid X \in \mathcal{V}(x) \}, \tag{10}$$

$$\mu' : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{V} : i \curvearrowright \mu'(i)$$
$$\text{où } \mu'(i) : E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) : x \curvearrowright \{ V \mid x \in iV \}, \tag{11}$$

$$\nu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{V} : a \curvearrowright \nu(a)$$
$$\text{où } \nu(a) : E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) : x \curvearrowright \{ V \mid x \notin a \sim V \} \tag{12}$$

et $$\nu' : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{F} : \mathcal{V} \curvearrowright \nu'(\mathcal{V})$$
$$\text{où } \nu'(\mathcal{V}) : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : X \curvearrowright \{ x \mid \sim X \notin \mathcal{V}(x) \} \tag{13}$$

Les fonctions d'intérieur et d'adhérence d'un espace $(E,\mathcal{V})$ sont respectivement $\mu(\mathcal{V})$ et $\nu'(\mathcal{V})$. Alors les propositions (1) et (2) peuvent s'écrire $\mathcal{V} = \mu'(\mu(\mathcal{V}))$ et $\mathcal{V} = \nu(\nu'(\mathcal{V}))$ respectivement. De même (3) et (4) deviennent $\mu(\mathcal{V}) = \lambda'(\nu'(\mathcal{V})$ et $\nu'(\mathcal{V}) = \lambda(\mu(\mathcal{V}))$.

On remarquera que λ est l'automorphisme intérieur associé à l'élément involutif $\sim$ dans le demi-groupe $(\mathcal{F}, \circ)$. λ est involutif et donc $\lambda' = \lambda^{-1} = \lambda$. Les considérations du début de cette section montrent que $\nu'(\nu(f)) = f$ et que $\mu(\nu(f)) = \lambda'(f)$.

Alors, comme $\nu'\nu = 1$ et $\nu\nu' = 1$, $\nu' = \nu^{-1}$. Maintenant μ est le produit de deux bijections : $\mu = \lambda'\nu'$ et son inverse est μ' puisque $\mu'\mu = I$. Ainsi le diagramme (14) est entièrement

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{V} \arrow[dr, shift left, "\nu'"] \arrow[dl, shift left, "\mu"] & \\ \mathcal{F} \arrow[ur, shift left, "\mu'"] \arrow[rr, shift left, "\lambda"] & & \mathcal{F} \arrow[ul, shift left, "\nu"] \arrow[ll, shift left, "\lambda'"] \end{tikzcd} \tag{14}$$

commutatif, c'est-à-dire :

<u>THEOREME 2</u> : La structure de l'espace general-topologique est entièrement déterminée dès que l'on se donne, arbitrairement choisie dans l'ensemble $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{F}$ convenable, soit la fonction de voisinage, soit la fonction d'intérieur, soit la fonction d'adhérence.

De plus, quel que soit le concept choisi comme initial, il revient au même de définir les deux autres concepts soit directement à partir du concept initial, soit successivement l'un à partir de l'autre dans n'importe quel ordre.

Dans la suite, les fonctions de voisinage, d'intérieur et d'adhérence seront notées respectivement $\mathcal{V}$, i et a sauf mention explicite du contraire. Nous nous permettrons également d'écrire "E est un espace general-topologique" pour "$(E, \mathcal{V})$ est un espace general-topologique".

Si E est vide, $\mathcal{F}$ se réduit à l'application constante $\emptyset$ de $\mathcal{P}(\emptyset)$ dans soi-même. Nous admettrons qu'avec cette fonction d'intérieur le vide est un espace general-topologique. C'est aussi un espace topologique.

L'essentiel des résultats qui précèdent se trouve dans APPERT [3]. Nous en reparlerons à la fin du Chapitre 3.

OUVERTS ET FERMES.

Soit E un espace general-topologique.

DEFINITION 3 :

1°) On dit d'un ensemble O (contenu dans E) qu'il est <u>ouvert</u> si et seulement s'il est contenu dans son intérieur.

2°) On dit d'un ensemble F qu'il est <u>fermé</u> si et seulement s'il contient son adhérence.

THEOREME 3 : Un ensemble F est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Démonstration. Par (4) $aF \subseteq F$ équivaut à $\sim i \sim F \subseteq F$, c'est-à-dire $i \sim F \supseteq \sim F$. ∎

<u>THEROME 4</u> : Un ensemble O est ouvert si et seulement s'il est un voisinage de chacun de ses points.

Démonstration. Par (1) $\forall x \in O$, $O \in \mathcal{V}(x)$ équivaut à $\forall x \in O$, $x \in iO$, c'est-à-dire $O \subseteq iO$. ∎

<u>AXIOME</u> ($_\circ$)

Soit E un espace general-topologique.

<u>THEOREME 5</u> : Les propositions

$$\forall x \in E, \ E \in \mathcal{V}(x), \tag{15}$$

$$E \text{ est ouvert} \tag{16}$$

$$\text{et } \emptyset \text{ est fermé} \tag{17}$$

sont équivalentes.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 3 et 4.

La proposition (15) sera dite <u>axiome ($_\circ$) relatif à la fonction de voisinage</u>, la proposition (16), <u>axiome ($_\circ$) relatif à la fonction d'intérieur</u> et la proposition (17), <u>axiome ($_\circ$) relatif à la fonction d'adhérence</u>. Un espace general-topologique vérifiant l'un de ces trois axiomes sera dit vérifier <u>l'axiome($_\circ$)</u>.

Nous introduirons dans les chapitres suivants les axiomes (m), (p) et (i). On pourrait adopter pour ces espaces les symboles general-T ou g-T, m-T et cetera complétant ainsi par la gauche la suite T, T_o, T_1, ... et cetera de Alexandroff et Hopf. Nous écrirons quant à nous : general-topologique ou g-topologique, g_o - topologique avec l'axiome ($_o$), m-topologique et cetera.

---

§ 2. CONTINUITE.-

Soient $(E,\mathcal{V})$ et $(E', \mathcal{V}')$ deux espaces general-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$. Soit x un point de E.

DEFINITION I : Nous dirons que f est continue au point x si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}'(f(x))$, $f^{-1} V \in \mathcal{V}(x)$.

Si f est continue en tout point de E, on dit simplement qu'elle est continue. Lorsque $(E,\mathcal{V})$ et $E',\mathcal{V}')$ sont des espaces topologiques cette notion de continuité coïncide avec la notion habituelle.
On peut encore exprimer la continuité à partir des autres concepts initiaux. Soient i' et a' les fonctions d'intérieur et d'adhérence respectivement de l'espace $(E', \mathcal{V}')$.

THEOREME 1. Les propositions

$$\forall x \in E,\ f^{-1}\mathcal{V}'(f(x)) \subseteq \mathcal{V}(x), \qquad (1)$$

$$\forall X' \subseteq E',\ f^{-1}i'X' \subseteq if^{-1}X' \qquad (2)$$

et $$\forall X' \subseteq E',\ af^{-1}X' \subseteq f^{-1}a'X' \qquad (3)$$

sont équivalentes. Elles expriment que f est continue.

Démonstration. (1) est essentiellement la définition de la continuité. Par 1-1(1) $V' \in \mathcal{V}'(f(x)) \Longrightarrow f^{-1}V' \in \mathcal{V}(x)$ est équivalent à $f(x) \in i'V' \Rightarrow x \in i\ f^{-1}V'$ d'où la thèse puisque

$f(x) \in i'V'$ équivaut à $x \in f^{-1}i'V'$. Par 1-1(4) et en remarquant que $\sim$ commute avec f^{-1} il vient $af^{-1}X' = \sim if^{-1}\sim X'$ et $f^{-1}a'X' = \sim f^{-1}i'\sim X'$.(2) peut encore s'écrire $\forall X' \subseteq E'$, $f^{-1}i'\sim X' \subseteq if^{-1}\sim X'$ (en substituant $\sim X'$ à X') ce qui équivaut à $\forall X' \subseteq E'$, $\sim f^{-1}i\sim X \supseteq \sim if^{-1}\sim X$, c'est-à-dire (3) si l'on utilise les égalités écrites plus haut. ∎

DEFINITION 2 : Nous dirons que f est ouverte au point x si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $fV \in \mathcal{V}'(f(x))$.

Si f est ouverte partout on dit simplement qu'elle est ouverte.

TEHOREME 2 : Les propositions

$$\forall x \in E,\ f\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}'(f(x)) \tag{4}$$

et

$$\forall X \subseteq E,\ fiX \subseteq i'fX \tag{5}$$

sont équivalentes. Elles expriment que f est ouverte.

Démonstration.(4) est essentiellement la définition de la propriété d'être une application ouverte. Par 1-1(1) $V \in \mathcal{V}(x) \implies f\ V \in \mathcal{V}'(f(x))$ équivaut à $x \in iX \implies f(x) \in i'fX$, c'est-à-dire à $fiV \subseteq i'fV$ et (4) équivaut à (5). ∎

DEFINITION 3 : Nous dirons que f est fermée si et seulement si X E, a'fX faX. (6)

DEFINITION 4 : Nous dirons que f est un homéomorphisme si et seulement si f est une bijection continue ainsi que son inverse.

On voit immédiatement qu'un homéomorphisme est encore une application continue et ouverte ainsi qu'une application continue et fermée. Le théorème suivant est évident.

THEOREME 3 : Les propositions

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{V}'(f(x)) = f\mathcal{V}(x),$$

$$\forall X \subseteq E, \quad i'fX = f\, iX$$

et $$\forall X \subseteq E, \quad a'fX = f\, aX$$

sont équivalentes. Elles expriment que f est un homéomorphisme

---

THEOREME 4 :

1°) Le composé de deux fonctions continues est une fonction continue.

2°) Le composé de deux fonctions ouvertes est une fonction ouverte.

3°) Le composé de deux fonctions fermées est une fonction fermée.

4°) Le composé de deux homéomorphismes est un homéomorphisme.

Démonstration. Soient $(E,\mathcal{V})$, $(E',\mathcal{V}')$ et $(E'',\mathcal{V}'')$ trois espaces general-topologiques, f une application : $E \longrightarrow E'$ et g une application : $E' \longrightarrow E''$.

1°) Supposons f et g continues. La continuité de g entraîne en particulier $\forall x \in E$, $\forall V'' \in \mathcal{V}''(g(f(x)))$, $g^{-1}V'' \in \mathcal{V}'(f(x))$. Or, par la continuité de f, $g^{-1}V'' \in \mathcal{V}'(f(x)) \Rightarrow f^{-1}g^{-1}V'' \in \mathcal{V}(x)$. D'où $\forall x \in E$, $\forall V'' \in \mathcal{V}''((g\circ f)(x))$, $(g\circ f)^{-1}V'' \in \mathcal{V}(x)$, c'est la continuité de $g\circ f$.

2°) Supposons f et g ouvertes. On a d'abord $\forall x \in E$, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $fV \in \mathcal{V}'(f(x))$. Mais $fV \in \mathcal{V}'(f(x)) \Rightarrow gfV \in \mathcal{V}''(g(f(x)))$. D'où $\forall x \in E$, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $(g\circ f)\ V \in \mathcal{V}(g\circ f(x))$.

3°) Supposons f et g fermées. a' et a" étant les fonctions d'adhérence de $(E', \mathcal{V}')$ et de $(E'', \mathcal{V}'')$ respectivement, on a $a'fX \subseteq faX$ et donc $ga'fX \subseteq gfaX$. Comme $a''gfX \subseteq ga'fX$ on a finalement $a''(g\circ f)X \subseteq (g\circ f)\ a\ X$.

4°) Découle immédiatement des autres thèses de ce théorème. ▮

Soient $(E, \mathcal{V})$ un espace general-topologique et $(E', \mathcal{V}')$ un espace muni de la topologie grossière. Soit f une application : $E \longrightarrow E'$.

<u>THEOREME 5</u> : L'application f est continue si et seulement si $(E, \mathcal{V})$ est un espace g_o -topologique.

Démonstration. Comme $\mathcal{V}'(f(x)) = \{E'\}$ et que $f^{-1}E' = E$, l'expression de la continuité se réduit à $\forall x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$, c'est la proposition 1-1(15). ▮

S'il faut préciser pour quelles general-topologie une application est continue — au cas où on considérerait plusieurs general-topologies sur un même ensemble, ou pour toute autre raison — on écrira par exemple :

$$f \text{ continue} : (E, \mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}').$$

On fera de même pour les fonctions ouvertes et fermées et pour les homéormorphismes.

COMPARAISON DES general-TOPOLOGIES.-

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux general-topologies pour un ensemble E.

DEFINITION 5 : Nous dirons que $\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{V}'$ si et seulement si l'application $\mathcal{V}$ domine $\mathcal{V}'$ dans l'ordonné $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)), \subseteq)$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in E, \ \mathcal{V}(x) \supseteq \mathcal{V}'(x) \qquad (7$$

Alors la proposition (1) qui exprime la continuité d'une application f peut se lire : $\mathcal{V}$ plus fine que $f^{-1}\mathcal{V}\circ f$. D'autre part (7) équivaut à : l'identité sur E est continue : $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow (E, \mathcal{V}')$. Ainsi les différentes expressions de la continuité de l'identité fourniront des propositions équivalentes à (7). Ces considérations démontrent le théorème suivant :

<u>THEOREME 6</u>. Si i' et a' sont respectivement les fonctions d'intérieur et d'adhérence de l'espace $(E,\mathcal{V}')$, les propositions

$$\forall X \subseteq E, \quad i'X \subseteq i\,X \tag{8}$$

et

$$\forall X \subseteq E, \quad a\,X \subseteq a'X \tag{9}$$

sont équivalentes à (7).

Soient $(E,\mathcal{V})$ et $(E',\mathcal{V}')$ deux espaces general-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$.

<u>THEOREME 7</u>. Supposons f continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}')$. Alors

1°) si $\mathcal{V}''$ est une general-topologie sur E', moins fine que $\mathcal{V}'$, f est continue : $(E,\mathcal{V})$ $(E',\mathcal{V}'')$;

2°) si $\mathcal{V}''$ est une general-topologie sur E, plus fine que $\mathcal{V}$, f est continue : $(E, \mathcal{V}'')$ $(E',\mathcal{V}')$.

Démonstration: 1°) Soit $V \in \mathcal{V}''(f(x))$, alors ($\mathcal{V}'$ est plus fine) $V \in \mathcal{V}'(f(x))$ et donc (f est continue) $f^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$.

2°) Soit $V \in \mathcal{V}'(f(x))$, alors $f^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$ et donc $f^{-1}V \in \mathcal{V}''(x)$. ∎

<u>THEOREME 8</u>. Supposons f ouverte : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$. Alors

1°) Si $\mathcal{V}''$ est une general-topologie sur E', plus fine que $\mathcal{V}'$, f est ouverte : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}'')$;

2°) Si $\mathcal{V}''$ est une general-topologie sur E, moins fine que $\mathcal{V}$, f est ouverte : $(E, \mathcal{V}'') \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$.

Démonstration : Soient i' et i" les fonctions d'intérieur correspondant à $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ respectivement.

1°) Soit $X \subseteq E$, $f\,iX \subseteq i'fX$ (f est ouverte) et $i'fX \subseteq i''fX$ ($\mathcal{V}''$ est plus fine). Par conséquent $fiX \subseteq i''fX$.

2°) On a $i''X \subseteq iX$ et $fiX \subseteq i'fX$. Donc $fi''X \subseteq i'fX$. ∎

<u>THEOREME 9</u> : Supposons f fermée : $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}')$. Alors

1°) si $\mathcal{V}''$ est une general-topologie sur E', plus fine que $\mathcal{V}'$, f est fermée : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}'')$;

2°) Si $\mathcal{V}''$ est une general-topologie sur E, moins fine que $\mathcal{V}$, f est fermée : $(E,\mathcal{V}'') \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$.

Démonstration : Soient a' et a" les fonctions d'adhérence correspondant à $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}''$ respectivement.

1°) On a $faX \supseteq a'fX$ et $a'fX \supseteq a''fX$. Donc $faX \supseteq a''fX$.

2°) On a $a''X \supseteq aX$ et $faX \supseteq a'fX$. Donc $fa''X \supseteq a'fX$. ∎

Citons dans le même ordre d'idées quelques cas particuliers intéressants. f est toujours continue si $\mathcal{V}$ est l'application constante $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire si $\forall x \in E$, $\mathcal{V}(x) = \mathcal{P}(E)$, en effet alors $\forall V \subseteq E'$, $f^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$. De même f est toujours continue si $\mathcal{V}'$ est l'application constante $\emptyset$. Si $\mathcal{V}'$ est la topologie grossière, c'est-à-dire la constante $\{E'\}$, f est continue si et seulement si $\mathcal{V}$ est une g_0-topologie, en effet la condition de continuité est alors $\forall x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$ puisque $f^{-1}E' = E$.

Si $\mathcal{V}'$ est l'application constante $\mathcal{P}(E')$, alors i' est l'application constante E' en effet la relation $X' \in \mathcal{V}'(y$ étant toujours vérifiée, $y \in i'X'$ l'est aussi (1-1(1)) et donc $i'X'=E'$. Dans ce cas encore, a'est la constante $\emptyset$.

On voit alors que si $\mathcal{V}'$ est l'application constante $\mathcal{P}(E')$, f est toujours à la fois ouverte et fermée. On aurait d'autres résultats de ce genre (concernant la topologie discrète en particulier) en se limitant à des espaces general-topologiques vérifiant certains des axiomes que nous introduirons dans les chapitres suivants.

RELATIVISATION.-

Soit E un espace general-topologique et D une partie de E.

<u>DEFINITION 6</u> : Nous appellerons <u>general-topologie induite sur D</u> <u>par</u> la general-topologie de E, la general-topologie $\mathcal{V}_D : D \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(D)) : x \rightsquigarrow \mathcal{V}_D(x)$ où

$$\mathcal{V}_D(x) \underset{\text{déf}}{=} \{V \cap D \mid V \in \mathcal{V}(x)\}. \tag{10}$$

Si E est en fait un espace topologique, alors $\mathcal{V}_D$ est précisément la topologie induite.

Soient i_D et a_D les fonctions d'intérieur et d'adhérence de l'espace $(D, \mathcal{V}_D)$.

THEOREME 10.

1°) $\forall X \subseteq D,\ iX \cap D \subseteq i_D X$. (11)

2°) $\forall X \subseteq D,\ aX \cap D \subseteq a_D X$. (12)

Démonstration.

1°) Soit $X \subseteq D$. Par 1-1(1) on a $x \in iX \Longleftrightarrow X \in \mathcal{V}(x)$. Alors, si de plus $x \in D$, on a $X \in \mathcal{V}_D(x)$ puisque $X = X \cap D$, c'est-à-dire $x \in i_D X$.

2°) Soit $X \subseteq D$. Par 1-1(2) on a $x \in a_D X \Longleftrightarrow \sim_D X \notin \mathcal{V}_D(x)$.

Mais $\sim_D X = \sim X \cap D$. Ainsi $x \in a_D X$ implique $\sim X \notin \mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire $x \in aX$. Comme $a_D X \subseteq D$ on a même $x \in aX \cap D$. ∎

On a pas en général l'égalité dans (11) en effet soit $\mathbb{R}$ l'espace topologique des nombres réels et $\mathbb{Q}$ le sous-ensemble des rationnels. L'intérieur de $\mathbb{Q}$ est vide alors que, pour la topologie induite, $\mathbb{Q}$ est son propre intérieur.

On a pas en général l'égalité dans (12). Soit E un ensemble quelconque, D une partie stricte de E, X une partie stricte de D et x un point de $\sim_D X$. Posons $\mathcal{V}(x) \underset{\text{déf}}{=} \{\sim_D X\}$ et pour y distinct de x, $\mathcal{V}(y) \underset{\text{déf}}{=} \{\{y\}\}$. Comme $\sim_D X \in \mathcal{V}_D(x)$ on a $x \notin a_D X$. Comme d'autre part $\sim_D X \neq \sim X$ on a $\sim X \notin \mathcal{V}(x)$ et donc $x \in aX$.

THEOREME 11: L'injection canonique d'inclusion $j : D \longrightarrow E$:

x x $x \longmapsto x$ est continue.

Démonstration : Soient $x \in D$ et $V \in \mathcal{V}(x)$, $j^{-1}V \in \mathcal{V}_D(x)$ par définition puisque $j^{-1}V = V \cap D$. ∎

<u>COROLLAIRE</u> : En utilisant la formule $j^{-1}X = X \cap D$ les expressions (2) et (3) de la continuité donnent pour j :

$$\forall X \subseteq E, \ iX \cap D \subseteq i_D(X \cap D) \tag{13}$$

et $$\forall X \subseteq E, \ a_D(X \cap D) \subseteq aX \cap D . \tag{14}$$

Les propositions (11) et (12) en sont alors des cas particuliers.

Remarquons que la définition de $\mathcal{V}_D$ nous assure du minimum suffisant pour la continuité de j. Plus précisément si $\mathcal{V}'$ est une autre general-topologie sur D, j est continue : $(D, \mathcal{V}') \longrightarrow E$ si et seulement si $\mathcal{V}'$ est plus fine que $\mathcal{V}_D$ puisque $\mathcal{V}_D(x) = j^{-1}\mathcal{V}(j(x))$. Ainsi la general-topologie induite est la general-topologie la moins fine sur D qui rende l'inclusion continue. Le problème de trouver une solution minimale de ce genre est soluble dans des cas bien plus généraux que celui de l'inclusion dans un espace general-topologique.

<u>General-TOPOLOGIES PROJECTIVE ET PRODUIT.-</u>

Soient E un ensemble et $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espace general-topologiques. Pour chaque i dans I, soit f_i une application : $E \longrightarrow E_i$. Si $\mathcal{W}$ est une general-topologie sur E, f_i est continue : $(E, \mathcal{W}) \quad (E_i, \mathcal{V}_i)$ si et seulement si $\forall x \in E$, $f_i^{-1}\mathcal{V}_i(f_i(x)) \subseteq \mathcal{W}(x)$. Ainsi $\mathcal{W}$ rend toutes les f_i continues si et seulement si $\mathcal{W}(x)$ contient tous les $f_i^{-1}\mathcal{V}_i(f_i(x))$.

<u>DEFINITION 7</u> : Nous appellerons <u>general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective sur E</u> la general-topologie $\mathcal{V}$ définie par

$$\mathcal{V}(x) = \bigcup \{ f_i^{-1}\mathcal{V}_i(f_i(x)) \mid i \in I \} . \tag{15}$$

$\mathcal{V}(x)$ est donc formé des images inverses de tous les voisinages de $f_i(x)$. et ce pour chaque i.

<u>THEOREME 12</u> : Une general-topologie $\mathcal{W}$ sur E rend toutes les f_i continues si et seulement si elle est plus fine que la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective.

<u>COROLLAIRE</u>. La general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective est la moins fine des general-topologies $\mathcal{W}$ sur E qui rendent toutes les f_i continues : $(E, \mathcal{W}) \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i)$.

<u>THEOREME 13</u> : Soit D un espace general-topologique et f une application : $D \longrightarrow E$. Alors f est continue : $D \longrightarrow (E, \mathcal{V})$ si et seulement si $\forall i \in I$, $f_i \circ f$ est continue : $D \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i)$.

Démonstration : La continuité des $f_i \circ f$ s'exprime par $\forall x \in D$, $\forall i \in I$, $\forall V \in \mathcal{V}_i(f_i(f(x)))$, $f^{-1}f_i^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$. Alors si $U \in \mathcal{V}(f(x))$, U étant de la forme $f_i^{-1}V$ pour un certain $i \in I$ et un certain V $\in \mathcal{V}_i(f_i(f(x)))$, On a $f^{-1}U \in \mathcal{V}(x)$ et f est donc continue. Inversément, si f est continue les $f_i \circ f$ sont continues par le théorème 4. 1° sur la composition des fonctions continues. ∎

Notons au passage que les f_i ne sont pas nécessairement ouvertes en effet, soit $f_k^{-1}V$ un voisinage de x ($k \in I$, $V \in \mathcal{V}_k(f_k(x))$), On ne connaît pas $f_i f_k^{-1} V$ en général et donc rien n'assure que $f_i f_k^{-1}$ V soit un voisinnage de $f_i(x)$.

Un cas particulier important est celui du produit cartésien. Soit $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces general-topologiques. Appelons p_k la projection : $x \curvearrowright x_k$ du produit E_i sur son kème composant. Le produit $\times\{E_i \mid i \in I\}$ sera noté E.

<u>DEFINITION 8</u> : Nous appellerons <u>general-topologie produit des</u> $\mathcal{V}_i$ la general-topologie $(p_i, \mathcal{V}_i)$-projective $\mathcal{V}$ sur E. Nous dirons encore que $(E, \mathcal{V})$ est l'<u>espace general-topologique produit des</u> espaces $(E_i, \mathcal{V}_i)$.

On peut donner de la general-topologie produit une description assez intuitive, inspirée de la description de la topologie produit chez Bourbaki. Appelons <u>1-cylindre</u> dans E un produit

$X_k \times (\times\{E_i \mid i \neq k\})$ où $X_k \subseteq E_k$ pour un certain k.

On dit alors que X_k est la <u>base</u> du 1-cylindre. E et $\emptyset$ sont les seuls 1-cylindres qui aient éventuellement plusieurs bases. Nous appellerons <u>impropres</u> de tels 1-cylindres.

Appelons <u>voisinage 1-cylindrique de</u> x un 1-cylindre dont la base X_k appartient à $\mathcal{V}_k(x_k)$. La general-topologie produit est la general-topologie qui associe à un point x ses voisinages 1-cylindriques.

Lorsque les espaces $(E_i, \mathcal{V}_i)$ sont des espaces topologiques, les intersections finies de voisinage 1-cylindriques de x forment un système fondamental de voisinages de x dans la topologie produit. La general-topologie produit d'espaces topologiques est en ce sens une sous-base locale de la topologie produit (voir "local subbase" dans KELLEY [2]).

Les projections ne sont pas nécessairement ouvertes en effet soit V le voisinage 1-cylindrique de x de base V_k. Pour $i \neq k$, $p_i V = E_i$ et rien n'assure dans l'espace general-topologique $(E_i, \mathcal{V}_i)$ que $E_i \in \mathcal{V}_i(f_i(x))$. Cependant si I est réduit au seul élément k, $E = E_k$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_k$ et $V = V_k$.

Notons pour simplifier $\sim_k$ le complémentaire relatif à E_k et soient i_k et a_k les fonctions d'intérieur et d'adhérence de l'espace $(E_k, \mathcal{V}_k)$.

THEOREME 14

1°) $\forall x \in E$, $\forall X \subseteq E$,

$$x \in iX \iff \exists k \in I : \exists X_k \subseteq E_k : X = p_k^{-1} X_k \; \& \; x_k \in i_k X_k . \tag{16}$$

2°) $\forall x \in E$, $\forall X \subseteq E$,

$$x \in aX \iff \forall k \in I, \forall X_k \subseteq E_k : X = p_k^{-1} X_k \implies x_k \in a_k X_k . \tag{17}$$

Démonstration.

1°) Par définition du produit $\mathcal{V}$ on a $X \in \mathcal{V}(x) \iff \exists k : \exists X_k :$
$X = p_k^{-1} X_k \;\&\; X_k \in \mathcal{V}_k(x_k)$

et il suffit maintenant d'appliquer I-I(1).

2°) En remarquant que $p_k^{-1} \sim_k X_k = \sim p_k^{-1} X_k$ on trouve par (16)
$x \notin i \sim X \iff \forall k, \forall X_k, X = p_k^{-1} X_k \implies x_k \notin i_k \sim_k X_k$
Ce qui est (17) par I-I(4). ∎

La complication relative des formules (16) et (17) n'est justifiée que par la présence éventuelle de 1-cylindres impropres. Pour le reste, le théorème se simplifie de la manière suivante :

COROLLAIRE :

1°) Si X n'est pas un 1-cylindre, $iX = \emptyset$. Si X est le 1-cylindre propre de base X_k, iX est le 1-cylindre, de base $i_k X_k$.

2°) Si X n'est pas un 1-cylindre, $aX = E$. Si X est le 1-cylindre propre de base X_k, aX est le 1-cylindre de base $a_k X_k$.

General-TOPOLOGIE QUOTIENT.-

Pour simplifier certaines écritures nous allons d'abord étendre une general-topologie $\mathcal{V}$ sur E en une application sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mathcal{V}: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) : X \rightsquigarrow \mathcal{V}(X)$ où

$$\mathcal{V}(X) \underset{\text{déf}}{=} \{ V \mid \forall x \in X,\ V \in \mathcal{V}(x) \}. \qquad (18)$$

On dira que V est un <u>voisinage de</u> X lorsque $V \in \mathcal{V}(X)$, c'est-à-dire lorsque V est un voisinage de chacun des points de X. Ceci n'entraîne aucune ambiguïté puisque $\mathcal{V}(\{x\}) = \mathcal{V}(x)$. Il est clair que si $X \supseteq Y$, $\mathcal{V}(X) \subseteq \mathcal{V}(Y)$ et, en particulier, $\forall x \in X$, $\mathcal{V}(X) \subseteq \mathcal{V}(x)$. $\mathcal{V}(\emptyset) = \mathcal{P}(E)$.

<u>THEOREME 15</u>. $\forall V \subseteq E$, $\forall X \subseteq E$,
$V \in \mathcal{V}(X) \iff X \subseteq iV$

Démonstration. De 1-1(1) on tire immédiatement que $\forall x \in X$, $V \in \mathcal{V}(x)$ équivaut à $\forall x \in X$, $x \in iV$. ∎

Soient $(E, \mathcal{V})$ un espace general-topologique, E' un ensemble et f une application : $E \longrightarrow E'$. Si $\mathcal{W}$ est une general-topologie sur E', f est continue : $(E, \mathcal{V})$ $(E', \mathcal{W})$ si et seulement si $\forall x \in E$, $\forall W \in \mathcal{W}(f(x))$, $f^{-1}W \in \mathcal{V}(x)$. Si $y \in E'$ et $W \in \mathcal{W}(y)$ on doit avoir $\forall x \in f^{-1}(y)$, $f^{-1}W \in \mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire $f^{-1}W \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$. Appelons $\mathcal{V}_f$ la general-topologie sur E' définie par

$$\mathcal{V}_f(y) = \{ V \mid f^{-1}V \in \mathcal{V}(f^{-1}(y)) \}. \qquad (19)$$

THEOREME 16 : Une general-topologie $\mathcal{W}$ sur E' rend f continue : $(E',\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{W})$ si et seulement si elle est moins fine que $\mathcal{V}_f$.

COROLLAIRE : $\mathcal{V}_f$ est la plus fine des general-topologies sur E' qui rendent f continue : $(E,\mathcal{V})$ $(E',\mathcal{W})$.

DEFINITION 9 : Nous appellerons general-topologie quotient de $\mathcal{V}$ par f la general-topologie $\mathcal{V}_f$ sur E' définie par (19).

Soit $\bar{f}$ l'application : $E \longrightarrow \mathrm{Imf}$ déterminée par la fonction f.

THEOREME 17: $\mathcal{V}_{\bar{f}}$, la general topologie quotient de $\mathcal{V}$ par $\bar{f}$, est la general-topologie induite sur Imf par la general-topologie quotient $\mathcal{V}_f$.

Démonstration. Posons $I \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{Imf}$. $V \in (\mathcal{V}_f)_I\ (y)$ si et seulement si $V = W \cap I$ pour un certain $W \in \mathcal{V}_f(y)$. Or $W \in \mathcal{V}_f(y)$ $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}W \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$ et si $V = W \cap I$, $f^{-1}V = f^{-1}W$.
Ainsi $V \in (\mathcal{V}_f)_I(y)$ si et seulement si $f^{-1}V \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$, c'est-à-dire si $V \in \mathcal{V}_{\bar{f}}\ (y)$. ∎

L'application f détermine un quotient $\frac{E}{f}$ de E, à savoir

$$\frac{E}{f} \underset{\text{déf}}{=} \left\{ f^{-1}(y) \;\middle|\; y \in \mathrm{Imf} \right\}$$

Soit p la projection canonique de E sur son quotient. $p(x) = f^{-1}f(x) = p^{-1}p(x)$ et donc $\frac{E}{f} = \frac{E}{p}$. Soit $\mathcal{V}_p$ la general-topologie quotient de $\mathcal{V}$ par p, L'espace $(\frac{E}{f}, \mathcal{V}p)$ est dit encore <u>espace general-topologique quotient</u> de l'espace $(E, \mathcal{V})$ <u>par</u> f.

<u>THEOREME 18</u> : Imf muni de la general-topologie quotient de $\mathcal{V}$ par $\bar{f}$ est homéomorphe à l'espace general-topologique quotient de $(E, \mathcal{V})$ par f. Un homéomorphisme canonique est l'application $g : \mathrm{Im}\, f \longrightarrow \frac{E}{f} : y \mapsto f^{-1}(y)$.

Démonstration. Si $X = f^{-1}(y)$, y est le seul élément de fX. L'inverse de g est $g^{-1} : \frac{E}{f} \longrightarrow \mathrm{Imf} : X \mapsto$ l'unique élément de fX en effet, si $X \in \frac{E}{f}$ et $x \in X$, $g^{-1}(X) = f(x)$ et $g(g^{-1}(X)) = f^{-1}f(x) = X$; inversément $g^{-1}(g(y)) = g^{-1}(f^{-1}(y)) = y$.

D'autre part, $f^{-1}(y)$, saturé dans E, a pour projection $f^{-1}(y) \in \frac{E}{f}$ et donc $f^{-1}(y) = p^{-1}f^{-1}(y)$. Alors, par la définition même de g, $f^{-1}(y) = p^{-1}g(y)$ et $f^{-1} = p^{-1}g$. Maintenant $V \in \mathcal{V}_{\bar{f}}(y) \iff f^{-1}V \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$ et $p^{-1}g\, V \in \mathcal{V}(p^{-1}g(y)) \iff gV \in \mathcal{V}_p(g(y))$. Par conséquent $V \in \mathcal{V}_{\bar{f}}(y) \iff gV \in \mathcal{V}_p(g(y))$. Ce qui (théorème 3) démontre que g est un homéomorphisme.∎

Soient (E,) un espace general-topologique, E' un ensemble et f une application surjective : $E \longrightarrow E'$. L'application $f^{-1} : \mathcal{P}(E') \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est injective. Son image est l'ensemble $\mathcal{S}at_f(E) \underset{\text{déf}}{=} \{f^{-1}fX \mid X \subseteq E\}$ de toutes les parties de E saturées pour l'application f. Notons encore f la restriction à $\mathcal{S}at_f(E)$ de l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E')$. L'application $f : \mathcal{S}at_f(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E')$ est alors une bijection. Comme $\mathcal{V}_f(y) = \{Y \mid f^{-1}Y \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))\}$ on a le théorème suivant :

THEOREME 19 : Les voisinages de y dans l'espace $(E', \mathcal{V}_f)$ sont en bijection par f avec les voisinages saturés de $f^{-1}(y)$ dans $(E, \mathcal{V})$.

THEOREME 20 : Un point y de E' est intérieur à Y si et seulement si son image inverse est contenue dans l'intérieur de l'image inverse de Y.

Soient, ici et dans la suite, i_f et a_f les fonctions d'intérieur et d'adhérence de l'espace $(E', \mathcal{V}_f)$. Soit aussi $\sim'$ le complémentaire relatif à E'. Démonstration du théorème 20. $y \in i_f Y$, équivaut à $Y \in \mathcal{V}_f(y)$, c'est-à-dire $f^{-1}Y \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$, soit encore, par le théorème 15, $f^{-1}(y) \subseteq if^{-1}Y$. ∎

THEOREME 21 : L'adhérence de l'image de X est l'image de l'adhérence du saturé de X.

Démonstration. $y \in a_f fX$ équivaut à $\sim' fX \notin \mathcal{V}_f(y)$.
Comme $f^{-1}\sim' = \sim f^{-1}$ et par la définition de $\mathcal{V}_f$ il vient $\sim f^{-1}fX \notin \mathcal{V}(f^{-1}(y))$, c'est-à-dire(théorème 15) $f^{-1}(y) \nsubseteq i\sim f^{-1}fX$, soit encore $f^{-1}(y) \cap af^{-1}fX \neq \emptyset$ ce qui équivaut bien à $y \in faf^{-1}fX$. ∎

L'application f n'est pas nécessairement ouverte puisque si $V \in \mathcal{V}(x)$ rien n'assure que $f^{-1}fV \in \mathcal{V}(x)$ et donc à fortiori rien n'assure que $fV \in \mathcal{V}_f(f(x)$, c'est-à-dire $f^{-1}fV \in \mathcal{V}(f^{-1}f(x))$.

<u>DEFINITION 10</u> : Nous dirons que f <u>est compatible avec</u> la general-topologie $\mathcal{V}$ de E si et seulement si

$$\forall x \in E,\ f^{-1}f\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}(f^{-1}f(x). \qquad (20)$$

<u>THEOREME 22</u> : L'application f est ouverte : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}_f)$ si et seulement si elle est compatible avec $\mathcal{V}$.

Démonstration. Comme $fV \in \mathcal{V}_f\ f(x)$ équivaut à $f^{-1}fV \in \mathcal{V}(f^{-1}\ f(x))$, la proposition $\forall x \in E,\ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ fV \in \mathcal{V}_f(f(x))$ qui exprime que f est ouverte est exactement la condition de compatibilité (20). ∎

Soit maintenant f une surjection : $E \longrightarrow E'$ compatible avec la general-topologie $\mathcal{V}$ de E.

<u>THEOREME 23</u> : Les voisinages de f(x) dans l'espace $(E', \mathcal{V}_f)$ sont en bijection par f avec les saturés des voisinages de x.

Démonstration. f étant une surjection, ff^{-1} est l'identité sur $\mathcal{P}(E')$. Alors la continuité de f implique $\mathcal{V}_f(f(x) \subseteq f\,\mathcal{V}(x)$. Mais f est aussi ouverte et on a donc $\mathcal{V}_f(f(x) = f\ \mathcal{V}(x)$ et aussi $\mathcal{V}_f(f(x)) = f\ f^{-1}f\,\mathcal{V}(x)$ ce qui est la thèse puisqu'en vertu des considérations qui introduisent le théorème 19 l'application f : $\mathcal{S}at_f(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E')$ est bijective. ∎ On a démontré au passage le corollaire suivant :

COROLLAIRE: Le système des voisinages de $f(x)$ dans $(E', \mathcal{V}_f)$ est l'image par f du système des voisinages de x.

THEOREME 24 : L'intérieur de l'image de X est l'image de l'intérieur du saturé de X.

Démonstration. Par la continuité de f, $f^{-1} i_f Y \subseteq i f^{-1} Y$.
Si l'on fait $Y = fX$ et en appliquant f aux deux membres de l'inclusion, il vient $i_f fX \subseteq f i f^{-1} fX$ et on a même l'égalité puisque f est ouverte. ∎

THEOREME 25 : Soit D un espace general-topologique et soit h une application : $E' \longrightarrow D$. Alors :

1°) h est continue : $(E', \mathcal{V}_f) \longrightarrow D$ si et seulement si $h \circ f$ est continue : $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow D$.

2°) h est ouverte : $(E', \mathcal{V}_f) \longrightarrow D$ si et seulement si $h \circ f$ est ouverte : $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow D$.

Démonstration. Si h est continue (resp: ouverte), alors $h \circ f$ est continue (resp : ouverte) par le théorème 4.1° (resp : 2°).
Il reste à démontrer les implications opposées.

1°) La continuité de $h \circ f$ s'exprime par $\forall x \in E$, $\forall V \in \mathcal{V}(h(f(x)))$, $f^{-1}h^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$. Or, par le théorème 23, $f^{-1}h^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$ implique $h^{-1}V \in \mathcal{V}_f(f(x))$ et on a donc en écrivant y pour $f(x)$, f étant surjective, $\forall y \in E'$, $\forall V \in \mathcal{V}(h(y))$, $h^{-1}V \in \mathcal{V}_f(y)$, ce qui est la continuité de h.

2°) $h \circ f$ est ouverte si et seulement si $\forall x \in E$, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$,
$hfV \in \mathcal{V}(h(f(x)))$.

Soit $W \in \mathcal{V}_f(f(x))$, c'est-à-dire, par le corollaire du théorème 23, $W = fV$ pour un certain $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors $hW = hfV \in \mathcal{V}(h(f(x)))$. On a donc, en écrivant y pour f(x), $\forall y \in E'$, $\forall V \in \mathcal{V}_f(y)$, $hV \in \mathcal{V}(h(y))$, ce qui veut dire que h est ouverte. ∎

Soit $(E, \mathcal{V})$ un espace general-topologique et R une relation d'équivalence sur E. Le quotient de E par R étant noté $\frac{E}{R}$, soit p la projection canonique de E sur son quotient. Posons, si $A \subseteq E$, $RA \underset{\text{déf}}{=} \{x \mid \exists x' \in A : (x,x') \in R\}$
et convenons encore d'écrire Rx pour $R\{x\}$. On a $p(x) = Rx = p^{-1}(p(x))$. $pA = \{Rx \mid x \in A\}$ et $p^{-1}pA = \bigcup\{Rx \mid x \in A\} = RA$.
Plus généralement $\frac{E}{R} \subseteq \mathcal{P}(E)$, donc $\mathcal{P}(\frac{E}{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et l'application $p^{-1} : \mathcal{P}(\frac{E}{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est exactement la restriction à $\mathcal{P}(\frac{E}{R})$ de l'opération $\bigcup : \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

Notons $\mathcal{V}_R$ la general-topologie $\mathcal{V}_p$ sur $\frac{E}{R}$.

DEFINITION 11 : Nous appellerons general-topologie quotient de $\mathcal{V}$ par l'équivalence R la general-topologie $\mathcal{V}_p$. On dira aussi que $(\frac{E}{R}, \mathcal{V}_R)$ est l'espace general-topologique quotient de l'espace $(E, \mathcal{V})$ par R.

Les théorèmes 19 à 25 s'appliquent au cas particulier de la surjection $p : E \longrightarrow \frac{E}{R}$. Certaines propriétés particulières de p peuvent donner à ces théorèmes une forme un peu spéciale.

L'inclusion $\frac{E}{R} \subseteq \mathcal{P}(E)$ est évidemment à la base de ces transformations. On a vu que l'image inverse d'une partie de $\frac{E}{R}$ est simplement son union. Inversément la projection d'un saturé est sa décomposition en classes d'équivalence .
Ainsi le théorème 19 deviendrait :

<u>THEOREME 19'</u> : Les voisinages d'une classe d'équivalence X dans l'espace $(\frac{E}{R}, \mathcal{V}_R)$ sont les décompositions en classes d'équivalence des voisinages saturés de X dans E.

On pourrait réécrire de même les théorèmes suivants. Bornons-nous seulement à ajouter :

<u>DEFINITION 10'</u> : Nous dirons que R est <u>compatible avec</u> la general-topologie $\mathcal{V}$ de E si et seulement si

$$\forall\, x \in E, \quad R\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}(Rx). \qquad (21)$$

(21) est évidemment la condition de compatibilité de p
On peut donc écrire :

<u>THEOREME 22'</u> : La projection canonique d'un espace $(E, \mathcal{V})$ sur son espace quotient $(\frac{E}{R}, \mathcal{V}_R)$ est ouverte si et seulement si la relation d'équivalence R est compatible avec $\mathcal{V}$.

CHAPITRE 2

ESPACE m-TOPOLOGIQUE.-

NOTE N. LES OPERATIONS F, G et H. SYSTEMES HEREDITAIRES ET ANTIHEREDITAIRES.

Nous allons introduire, pour simplifier l'exposé des notions qui suivent et en particulier des notions de convergence, deux opérations, F et G, sur les systèmes de parties d'un ensemble.

Soit E un ensemble.

DEFINITION 1 : Soit $\mathfrak{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$;

$$F\mathfrak{A} \underset{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq E \,\&\, \exists A \in \mathfrak{A} : A \subseteq X\}. \tag{1}$$

$$G\mathfrak{A} \underset{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq E \,\&\, \forall A \in \mathfrak{A} : A \cap X \neq \emptyset\}. \tag{2}$$

Ceci définit deux opérations F et G : $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Elles sont liées entre elles d'une manière simple.

THEOREME 1: $\forall X \subseteq E, \forall \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$$X \in F\mathfrak{A} \iff \sim X \notin G\mathfrak{A} \tag{3}$$

Démonstration : $A \subseteq X \iff A \cap \sim X = \emptyset$. ∎

THEOREME 2. F. vérifie les propriétés suivantes :

$$F\,\emptyset = \emptyset, \tag{4}$$
$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E),\ F\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}, \tag{5}$$
$$\forall \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(E),\ F\mathcal{A} \cup F\mathcal{A}' = F(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') \tag{6}$$
et
$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E),\ FF\mathcal{A} \subseteq F\mathcal{A}. \tag{7}$$

Démonstration. Pour (4), $\exists A \in \emptyset$ est impossible et donc $\forall X \subseteq E$, $X \notin F\emptyset$. (5) est évident puisque $A \supseteq A$. Pour (6) il suffit de remarquer que $[(\exists A \in \mathcal{A} : A \subseteq X)$ ou $(\exists A \in \mathcal{A}' : A \subseteq X)]$ équivaut à $\exists A \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' : A \subseteq X$. (7) est évident puisque $Y \supseteq X \supseteq A \Longrightarrow Y \supseteq A$. ∎

F vérifie donc les axiomes d'une fermeture topologique (au sens habituel) sur $\mathcal{P}(E)$.

DEFINITION 2 : Nous dirons d'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ qu'elle est antihéréditaire si et seulement si

$$\forall X \subseteq E,\ (\exists A \in \mathcal{F} : X \supseteq A) \Longrightarrow X \in \mathcal{F}. \tag{8}$$

On voit que $\mathcal{F}$ est antihéréditaire si et seulement si $F\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$, et les fermés de la topologie sur $\mathcal{P}(E)$ qui a F pour fonction d'adhérence sont exactement les parties antihéréditaires de $\mathcal{P}(E)$.

DEFINITION 3 : Nous appellerons $F\mathcal{A}$ la fermeture antihéréditaire de $\mathcal{A}$.

F étant la fonction d'adhérence d'une topologie, on a :

THEOREME 3 : $F\mathcal{A}$ est le plus petit système antihéréditaire de parties de E qui contienne $\mathcal{A}$.

Une topologie de ce genre peut être définie sur n'importe ensemble D munie d'une relation transitive $<$ en posant, pour tout $C \subseteq D$, $\overline{C} = \{ d \mid d \in D \,\&\, \exists c \in C : c < d \}$. Les fermés sont alors les parties finales pour la relation $<$ (voir pour la définition de "partie finale" la définition 2-N'.3 et pour les propriétés de l'ensemble des parties finales comme famille de fermés le théorème 2-N'.1, et les considérations qui le suivent immédiatement).

Si $<$ est une relation d'ordre, la topologie ainsi obtenue est appelée par Bourbaki topologie droite de l'ordonné $(D,<)$ (BOURBAKI [I] , § 1, exercice 1).

Pour donner une description plus complète de la topologie de la fermeture antihéréditaire, nous allons en rechercher la fonction d'intérieur et, de là, les ouverts et les voisinages.

La fonction d'intérieur associée à F par 1-1(3) est l'application $H : \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) : \mathcal{A} \frown\!\!\!\to H\mathcal{A}$ où

$$H\mathcal{A} \underset{\text{déf}}{=} \{ X \mid \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{A} \}, \qquad (9)$$

en effet, 1-1(3) donne $X \in H\mathcal{A} \iff X \notin F \sim_{\mathcal{P}(E)} \mathcal{A}$, et donc, par le théorème 1, $X \in H\mathcal{A} \iff \sim X \in G \sim_{\mathcal{P}(E)} \mathcal{A}$. Or $A \notin \mathcal{A} \Longrightarrow \sim X \cap A \neq \emptyset$ équivaut à $A \subseteq X \Longrightarrow A \in \mathcal{A}$. Par conséquent $\sim X \in G \sim_{\mathcal{P}(E)} \mathcal{A}$ équivaut à $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{A}$.

On appelle héréditaire un système $\mathcal{H}$ de parties de E tel que

$$\forall H \in \mathcal{H}, \forall X \subseteq E, X \subseteq H \Rightarrow X \in \mathcal{H},$$

c'est-à-dire tel que $H\mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}$. Ainsi les ouverts de cette topologie sont les parties héréditaires de $\mathcal{P}(E)$. Nous appellerons $H\mathcal{A}$ <u>l'intérieur héréditaire de</u> $\mathcal{A}$. C'est le plus grand système héréditaire contenu dans $\mathcal{A}$.

$\mathcal{P}(X)$ est clairement le plus petit système héréditaire contenant X. Par conséquent $\mathcal{A}$ est un voisinage de X si et seulement si $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{A}$.

Nous allons maintenant établir quelques propriétés de F et de G qui nous seront utiles dans la suite.

<u>THEOREME 4</u> : Pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$, $G\mathcal{A}$ est antihéréditaire.

Démonstration. Si $Y \supseteq X$ et si $X \in G\mathcal{A}$, alors $\forall A \in \mathcal{A}$, $A \cap Y \supseteq A \cap X$ et donc $A \cap Y \neq \emptyset$ d'où $Y \in G\mathcal{A}$. ▌

<u>THEOREME 5</u> : Quelles que soient les parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{P}(E)$, les propositions

$$G\mathcal{A}' \subseteq G\mathcal{A}, \tag{10}$$

$$F\mathcal{A}' \supseteq F\mathcal{A} \tag{11}$$

et

$$F\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A} \tag{12}$$

sont équivalentes.

Démostration. Par le théorème 1, (10) équivaut à $\forall X \subseteq E$, $\sim X \notin F\mathcal{A}' \implies \sim X \notin F\mathcal{A}$, c'est-à-dire, en substituant X à $\sim X$, $\forall X \subseteq E$, $X \in F\mathcal{A} \implies X \in F\mathcal{A}'$ et les propositions (10)et (11) sont équivalentes. $F\mathcal{A}$ étant le plus petit antihéréditaire contenant

$\mathcal{Q}$ (théorème 3) et $F\mathcal{Q}'$ étant antihéréditaire par (7), $\mathcal{Q} \subseteq F\mathcal{Q}'$ implique $F\mathcal{Q} \subseteq F\mathcal{Q}'$.

Inversément, $F\mathcal{Q} \subseteq F\mathcal{Q}'$ implique $\mathcal{Q} \subseteq F\mathcal{Q}'$ par (5). Ainsi les propositions (11) et (12) sont équivalentes. ▮

THEOREME 6 :

1°) les propositions

$$\emptyset \in \mathcal{Q},$$

$$\emptyset \in H\mathcal{Q}, \qquad \emptyset \in F\mathcal{Q}, \qquad E \in G\mathcal{Q}, \qquad (13)$$
$$H\mathcal{Q} \neq \emptyset, \qquad F\mathcal{Q} = \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad G\mathcal{Q} = \emptyset$$

sont équivalentes.

2°) les propositions

$$\mathcal{Q} = \emptyset, \qquad F\mathcal{Q} = \emptyset, \qquad G\mathcal{Q} = \mathcal{P}(E)$$
$$E \in F\mathcal{Q} \quad \text{et} \quad \emptyset \in G\mathcal{Q} \qquad (14)$$

sont équivalentes.

Ces équivalences résultent immédiatement des définitions.

COROLLAIRES :

1°) Une partie $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}(E)$ est dense pour la topologie de la fermeture antihéréditaire si et seulement si $\emptyset \in \mathcal{Q}$.

2°) Une partie $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}(E)$ est rare si et seulement si $\emptyset \notin \mathcal{Q}$.

3°) Tout ouvert non vide est dense et tout fermé différent de l'espace $\mathcal{P}(E)$ tout entier est rare.

Démonstration.

1°) $\emptyset \in \mathcal{A} \iff F\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ est une des équivalences (13).

2°) Une des équivalences (13) donne $\emptyset \notin \mathcal{A} \iff \emptyset \in F\mathcal{A}$. Une autre équivalence (13) appliquée à $F\mathcal{A}$ donne $\emptyset \notin F\mathcal{A} \iff HF\mathcal{A} = \emptyset$. Ainsi l'intérieur de l'adhérence de $\mathcal{A}$ est vide si et seulement si $\emptyset \notin \mathcal{A}$.

3°) Si $\mathcal{A}$ est un ouvert non vide, $H\mathcal{A} \neq \emptyset$ et donc, par une des équivalences (13), $F\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$. Si $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(E)$ et est fermé, $F\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(E)$ et donc, par une des équivalences (13), $\emptyset \notin \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est donc rare par le corollaire 2°. ∎

Balázs, Borsan, Froda-Schechter et Hamburg ont étudié les opérations définies à partir des relations d'inclusion et de disjonction et de leur négation. On y retrouverait les opérations F et G entre autres et les théorèmes 1, 3 et 5 (voir Balazs, ... [2]).

SYSTEMES RARES ET SOUS-SYSTEMES.-

Un système de parties de E qui est rare pour la topologie de la fermeture antihéréditaire sera dit par abréviation <u>système rare sur</u> E. Plus précisément, l'ensemble

$$\mathcal{A}_E \underset{\text{déf}}{=} \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \,\&\, \emptyset \notin \mathcal{A}\} \tag{15}$$

sera le domaine de définition de la fonction dite convergence. Nous omettrons le plus souvent l'indice E dans la notation $\mathcal{A}_E$. Si X est une partie de E, on dira qu'un système rare sur E est <u>dans</u> X s'il est aussi un système rare sur X, c'est-à-dire si tous ses éléments sont contenus dans X.

<u>DEFINITION 4</u> : Un système $\mathcal{A}'$ de parties de E sera dit <u>sous-système d</u>'un système rare $\mathcal{A}$ si et seulement s'il est lui-même un système rare et s'il est dense dans $\mathcal{A}$.

La relation sous-système sera représentée par le symbole sub. On a ainsi :

$$\mathcal{A}' \text{sub}\, \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}' \in \mathfrak{A} \;\&\; F\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A} . \qquad (16)$$

<u>THEOREME 7</u> : $\forall X \subseteq E, \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A},$

$$X \in G\mathcal{A} \iff \exists\, \mathcal{A}' \text{sub}\, \mathcal{A} : X \in G\mathcal{A}'.$$

Démonstration. Si $X \in G\mathcal{A}$, alors on a $\mathcal{A}\,\text{sub}\,\mathcal{A}$ et $X \in G\mathcal{A}$. Inversément $\mathcal{A}'\text{sub}\,\mathcal{A}$ implique $G\mathcal{A}' \in G\mathcal{A}$ et donc si $\mathcal{A}'\text{sub}\,\mathcal{A}$ et si $X \in G\mathcal{A}'$, $X \in G\mathcal{A}$. ▮

Une variante de ce théorème nous sera utile à plus d'un endroit.

<u>THEOREME 8</u> : $\forall X \subseteq E, \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A}$,

$$X \in G\mathcal{A} \iff \exists\, \mathcal{A}' \text{sub}\, \mathcal{A} \text{ dans } X.$$

Démonstration. Si $X \in G\mathcal{A}$, alors $\{A \cap X \mid A \in \mathcal{A}\}$ est sub $\mathcal{A}$ puisque $A \cap X \subseteq A$ et $A \cap X \neq \emptyset$. D'autre part $\{A \cap X \mid A \in \mathcal{A}\}$ **est dans** X par construction. Inversément $\mathcal{A}'$ dans X implique $X \in G\mathcal{A}'$ et donc, par le théorème précédent, $\exists\, \mathcal{A}'\text{sub}\,\mathcal{A}$ dans X implique $X \in G\mathcal{A}$. ▮

FERMETURE ANTIHEREDITAIRE D'UNE APPLICATION.-

Soit $\mathcal{V}$ une application définie sur un ensemble D quelconque et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Nous appellerons fermeture antihéréditaire de $\mathcal{V}$ l'application $F\mathcal{V}$: $D \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$: $x \rightsquigarrow F\mathcal{V}(x)$. Nous dirons que $\mathcal{V}$ est antihéréditaire lorsque $F\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$. $F\mathcal{V}$ est la plus petite fonction antihéréditaire dominant $\mathcal{V}$.

Tout ceci vaut en particulier pour les general-topologies sur E.

IMAGES DES OPERATIONS F ET G.-

Donnons encore, en vue d'une utilisation éventuelle, les propositions suivantes :

$$f^{-1}X \in F\mathcal{A} \iff X \in Ff\mathcal{A} \tag{17}$$

parce que $A \subseteq f^{-1}X \iff fA \subseteq X$. De là

$$f^{-1}\mathcal{B} \subseteq F\mathcal{A} \iff \mathcal{B} \subseteq Ff\mathcal{A} \tag{18}$$

et comme $Ff\mathcal{A} \leq Ff\mathcal{A}$, on a en particulier

$$f^{-1}Ff\mathcal{A} \leq F\mathcal{A} \ . \tag{19}$$

$$X \in F\mathcal{A} \implies f^{-1}X \in Ff^{-1}\mathcal{A} \tag{20}$$

parce que $A \subseteq X \implies f^{-1}A \subseteq f^{-1}X$. De là

$$\mathcal{B} \subseteq F\mathcal{A} \implies f^{-1}\mathcal{B} \subseteq Ff^{-1}\mathcal{A} \tag{21}$$

et comme $F\mathcal{A} \subseteq F\mathcal{A}$, on a en particulier

$$f^{-1}F\mathcal{A} \subseteq Ff^{-1}\mathcal{A}. \tag{22}$$

$$X \in F\mathcal{A} \Longrightarrow f\,X \in Ff\mathcal{A} \tag{23}$$

parce que $A \subseteq X \Longrightarrow f^{-1}A \subseteq f^{-1}X$. De là

$$\mathcal{B} \subseteq F\mathcal{A} \Longrightarrow f\mathcal{B} \subseteq Ff\mathcal{A} \tag{24}$$

et comme $F\mathcal{A} \subseteq F\mathcal{A}$, on a en particulier

$$fF\mathcal{A} \subseteq Ff\mathcal{A}. \tag{25}$$

$$f^{-1}X \in G\mathcal{A} \Longleftrightarrow X \in Gf\mathcal{A} \tag{26}$$

parce que $A \cap f^{-1}X \neq \emptyset \Longleftrightarrow fA \cap X \neq \emptyset$. De là

$$f^{-1}\mathcal{B} \subseteq G\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \subseteq Gf\mathcal{A} \tag{27}$$

et comme $Gf\mathcal{A} \subseteq Gf\mathcal{A}$, on a en particulier

$$f^{-1}Gf\mathcal{A} \subseteq G\mathcal{A}. \tag{28}$$

$$fX \in G\mathcal{A} \Longleftrightarrow X \in G\,f^{-1}\mathcal{A} \tag{29}$$

parce que $fX \cap A \neq \emptyset \Longleftrightarrow X \cap f^{-1}A \neq \emptyset$. De là

$$f\mathcal{B} \subseteq G\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \subseteq Gf^{-1}\mathcal{A} \tag{30}$$

et comme $Gf^{-1}\mathcal{A} \subseteq G\,f^{-1}\mathcal{A}$, on a **en** particulier

$$f\,Gf^{-1}\mathcal{A} \subseteq G\mathcal{A}. \tag{31}$$

$$X \in G\mathcal{A} \Longrightarrow fX \in Gf\mathcal{A} \tag{32}$$

parce que $X \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow fX \cap fA \neq \emptyset$. De là

$$\mathcal{B} \subseteq G\mathcal{A} \Longrightarrow f\mathcal{B} \subseteq Gf\mathcal{A} \tag{33}$$

et comme $G\mathcal{A} \subseteq G\mathcal{A}$, on a en particulier

$$fG\mathcal{A} \subseteq Gf\mathcal{A}. \tag{34}$$

$$f^{-1}X \in Gf^{-1}\mathcal{A} \Longrightarrow X \in G\mathcal{A} \tag{35}$$

parce que $f^{-1}A \cap f^{-1}X \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap X \neq \emptyset$. De là

$$f^{-1}\mathcal{B} \subseteq Gf^{-1}\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \subseteq G\mathcal{A}. \tag{36}$$

§1. FONCTION DE VOISINAGE ANTIHEREDITAIRE. INTERIEUR ET ADHERENCE MONOTONES. AXIOME (m). ESPACE m-TOPOLOGIQUE.

Soit E un espace general-topologique.

THEOREME 1: Les propositions

$\mathcal{V}$ est antihéréditaire, (1)

i est monotone croissante (dans l'ordonné $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ (2)

et a est monotone croissante (3)

sont équivalentes.

Démonstration. Les propositions $X \subseteq Y \Longrightarrow (x \in iX \Longrightarrow x \in iY)$ et $X \subseteq Y \Longrightarrow (X \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow Y \in \mathcal{V}(x))$ sont équivalentes par 1-1(1) et donc les propositions (1) et (2) sont équivalentes. D'autre part, par 1-1(3), $iX \subseteq iY$ équivaut à $\sim a \sim X \subseteq \sim a \sim Y$, c'est-à-dire $a \sim X \supseteq a \sim Y$. Alors, en substituant X à $\sim X$ et Y à $\sim Y$ dans $\forall X$ et $Y \subseteq E$, $X \subseteq Y \Longrightarrow iX \subseteq iY$, on trouve $\forall X$ et $Y \subseteq E$, $X \subseteq Y \Longrightarrow aX \subseteq aY$.∎ Dans la suite nous dirons simplement monotone pour monotone croissant.

La proposition (1) sera dite <u>axiome (m) relatif à la fonction de voisinage</u>, la proposition (2), <u>axiome (m) relatif à la fonction d'intérieur</u> et la proposition (3), <u>axiome (m) relatif à la fonction d'adhérence</u>. Un espace general-topologique vérifiant l'un de ces trois axiomes sera dit simplement vérifier <u>l'axiome (m)</u>.

<u>DEFINITION 1</u>: Nous appellerons <u>espace m-topologique</u> un espace general-topologique vérifant l'axiome (m).
La general-topologie d'un tel espace sera dite aussi <u>m-topologie</u>.

Soit E un espace m-topologique.

<u>THEOREME 2</u> :

1°) Un point x de E est intérieur à une partie de X de E si et seulement si X contient tous les voisinages de x.

2°) x adhère à X si et seulement si X rencontre tous les voisinages de x.

Démonstration.
1°) Comme $\mathcal{V}(x) = F\,\mathcal{U}(x)$ (axiome (m)), 1-1(1) devient $x \in iX \Longleftrightarrow X \in F\,\mathcal{U}(x)$.

2°) $x \notin i\sim X \Longleftrightarrow \sim X \notin F\,\mathcal{V}(x)$ par le 1° de ce théorème. Alors, par 1-1(4) et le théorème 2-N.1, $x \in aX \Longleftrightarrow X \in G\,\mathcal{V}(x)$. ▮

INTERIEUR ET ADHERENCE MONOTONES COMME CONCEPT INITIAL DE LA STRUCTURE D'ESPACE m-TOPOLOGIQUE.-

Soit E un ensemble. Considérons les ensembles

$$\mathcal{V}_{ah} \underset{\text{déf}}{=} \{ \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \in \mathcal{V} \ \& \ \mathcal{V} \text{ antihéréditaire} \} \tag{4}$$

et $$\mathcal{F}_m \underset{\text{déf}}{=} \{ f \mid f \in \mathcal{F} \ \& \ f \text{ monotone} \} . \tag{5}$$

Comme dans tout espace general-topologique on a $a = \lambda(i)$, $i = \mu(\mathcal{V})$ et $\mathcal{V} = \nu(a)$ (voir 1-1(6) et ss.), le théorème 1 nous assure que $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_{ah} \Longrightarrow \mu(\mathcal{V}) \in \mathcal{F}_m$, que $i \in \mathcal{F}_m \Longrightarrow \lambda(i) \in \mathcal{F}_m$ et cetera. En d'autres termes, les applications :

$$\begin{aligned} &\lambda_m : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_m : i \curvearrowright \lambda(i), \\ &\lambda'_m : \mathcal{F}_m \qquad \mathcal{F}_m : a \curvearrowright \lambda'(a), \\ &\mu_m : \mathcal{V}_{ah} \longrightarrow \mathcal{F}_m : \mathcal{V} \curvearrowright \mu(\mathcal{V}) \text{ et cetera} \end{aligned} \tag{6}$$

sont bien définies. Finalement le diagramme 1-1(14) se restreint convenablement en un diagramme (7) entièrement.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{V}_{ah} \arrow[dl, shift left, "\mu_m"] \arrow[dr, shift left, "\nu'_m"] & \\ \mathcal{F}_m \arrow[ur, shift left, "\mu'_m"] \arrow[rr, shift left, "\lambda_m"] & & \mathcal{F}_m \arrow[ul, shift left, "\nu_m"] \arrow[ll, shift left, "\lambda'_m"] \end{tikzcd} \tag{7}$$

commutatif. Le théorème 2 fournit d'ailleurs des variantes pour les définitions de μ_m et de ν'_m.

THEOREME 3 : La structure de l'espace m-topologique est déterminée dès que l'on se donne soit la fonction de voisinage (arbitrairement choisie dans $\mathcal{V}_{ah}$), soit la fonction d'intérieur, soit la fonction d'adhérence (choisies dans $\mathcal{F}'_m$).

Il en sera de même pour les axiomes ultérieurs pourvu que l'on dispose d'un théorème comparable au théorème 1 pour l'axiome (m). Dans la suite nous nous dispenserons de construire de tels diagrammes et nous nous contenterons de donner de l'axiome envisagé les différentes formes relatives à chacun des concepts initiaux possibles.

AXIOME ($_o$).

Soit E un espace m-topologique.

THEOREME 4 : L'axiome ($_o$) est encore équivalent à la proposition $\forall x \in E,\ \mathcal{U}(x) \neq \emptyset$.

Démonstration. $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset \iff E \in \mathcal{V}(x)$ est une des équivalences 2-N(13) pour $\mathcal{V}(x) = F\,\mathcal{U}(x)$. $\blacksquare$

§2. LA CONVERGENCE DES SYSTEMES RARES.-

Soit E un espace m-topologique.

DEFINITION 1 : L'application $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(E) : \mathfrak{A} \mapsto L\mathfrak{A}$

où $L\mathfrak{A} \underset{déf}{=} \{x \mid \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathfrak{A}\}$ (1)

sera dite convergence de l'espace E.

Nous dirons que $\mathfrak{A}$ converge vers x ou que x est un point limite de $\mathfrak{A}$ si et seulement si $x \in L\mathfrak{A}$.

Ainsi $L\mathfrak{A}$ est l'ensemble des points limite de $\mathfrak{A}$. Sauf mention explicite du contraire, la convergence sera notée L dans n'importe quel espace m-topologique.

THEOREME 1 : Tout sous-système d'un système rare convergeant vers un point converge également vers ce point.

Soit à démontrer : $\forall x \in E, \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{A}$, $x \in L\mathfrak{A} \Longrightarrow \forall \mathfrak{A}' \text{sub} \mathfrak{A}$, $x \in L\mathfrak{A}'$ (2)

Démonstration. $\mathcal{V}(x) \subseteq F\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{A} \subseteq F\mathfrak{A}' \Longrightarrow \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathfrak{A}'$ (en faisant usage du théorème 2-N.5 et de la transitivité de l'inclusion).∎

THEOREME 2 : Un système rare $\mathfrak{A}$ converge vers le point x si et seulement si on peut trouver, dans l'union de chacun de ses sous-systèmes $\mathfrak{A}'$, un système rare $\mathfrak{A}''$ convergeant vers x.

C'est-à-dire : $\forall x \in E, \forall \mathcal{C} \in \mathcal{A}$,

$$x \in L\mathcal{C} \iff \forall \mathcal{C}' \text{sub}\, \mathcal{C}, \exists\, \mathcal{C}'' \in \mathcal{A} \text{ dans } \bigcup \mathcal{C}' : x \in L\mathcal{C}''. \qquad (3)$$

Démonstration. $x \in L\mathcal{C}$ & $\mathcal{C}'$sub $\mathcal{C} \Longrightarrow x \in L\mathcal{C}'$. Comme $\mathcal{C}'$ est dans $\bigcup \mathcal{C}'$ il suffit de prendre $\mathcal{C}'$ pour $\mathcal{C}''$. Inversément supposons que $x \notin L\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $\exists V \in \mathcal{V}(x) : \sim V \in G\,\mathcal{C}$ (par le théorème 2-N.1). Alors (théorème 2-N.8). $\exists\, \mathcal{C}'$sub $\mathcal{C}$ dans $\sim V$.
Maintenant si $\mathcal{C}''$ est dans $\bigcup \mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ est dans $\sim V$ d'où $\sim V \in G\,\mathcal{C}''$ et $x \notin L\mathcal{C}''$. ∎

On remarque que $x \in L\mathcal{C} \iff \mathcal{C}$ sub $\mathcal{V}(x)$ par définition même de L. D'autre part si $\mathcal{V}(x) \in \mathcal{A}$ on a $x \in L\mathcal{V}(x)$ et si $\mathcal{V}(x) \notin \mathcal{A}$, rien ne converge vers x.

LA CONVERGENCE DES SYSTEMES RARES COMME CONCEPT INITIAL DE LA STRUCTURE D'ESPACE m-TOPOLOGIQUE.-

Soit E un ensemble. Considérons, outre l'ensemble $\mathbb{V}$ défini en 1-1(6), l'ensemble

$$\mathbb{L} \underset{\text{déf}}{=} \{ L \mid L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(E) \}. \qquad (4)$$

Etant donné $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$, définissons $L_{\mathcal{V}} \in \mathbb{L}$ par l'équivalence

$$x \in L_{\mathcal{V}}\, \mathcal{C} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall V \subseteq E,\ V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V \in F\mathcal{C}, \qquad (5)$$

et de même, étant donné $L \in \mathbb{L}$, définissons $\mathcal{V}_L \in \mathbb{V}$ par

$$V \in \mathcal{V}_L(x) \underset{\text{déf}}{\iff} \forall \mathcal{C} \in \mathcal{A},\ x \in L\mathcal{C} \Longrightarrow V \in F\mathcal{C}. \qquad (6)$$

Considérons maintenant les ensemble $\mathbb{V}_{ah}$ défini en 2-1(4) et

$$\mathbb{L}_m \underset{\text{déf}}{=} \{ L \mid L \in \mathbb{L} \,\&\, L \text{ vérifie } (3) \}. \qquad (7)$$

Si $\mathcal{V} \in \mathbb{V}_{ah}$, $L_{\mathcal{V}}$ est exactement la convergence de l'espace m-topologique $(E, \mathcal{V})$ pour laquelle (3) a été démontré et donc dans ce cas $L_{\mathcal{V}} \in \mathbb{L}_m$. Mais en fait les démonstrations de (2) et (3) n'utilisent pas le caractère antihéréditaire de $\mathcal{V}$ et on a donc, $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V}$,

$$L_{\mathcal{V}} \in \mathbb{L}_m . \tag{8}$$

On a de même, $\forall L \in \mathbb{L}$

$$\mathcal{V}_L \in \mathbb{V}_{ah}, \tag{9}$$

puisque si $W \supseteq V$, alors $V \in F\mathcal{Q} \implies W \in F\mathcal{Q}$ et donc $V \in \mathcal{V}_L(x)$ $\implies W \in \mathcal{V}_L(x)$.

On peut encore construire au moyen de (6) un $\mathcal{V}_{L_{\mathcal{V}}} \in \mathbb{V}$ à partir de $L_{\mathcal{V}} \in \mathbb{L}$. Nous écrirons $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}}$ pour éviter de trop longues suites descendantes d'indices. Par (9) on a $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}} \in \mathbb{V}_{ah}$.

<u>THEOREME 3</u> : $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}}$ est la fermeture antihérédiraire de $\mathcal{V}$.

Démonstration. $V \in \mathcal{V}(x)$ implique $\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A}$, $x \in L\mathcal{Q} \implies V \in F\mathcal{Q}$ et donc $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_{L\mathcal{V}}$. D'autre part, supposons $V \notin F\mathcal{V}(x)$. Alors $\emptyset \notin \mathcal{V}(x)$ et donc $\mathcal{V}(x) \in \mathcal{A}$, d'où $x \in L_{\mathcal{V}}\mathcal{V}(x)$. On a ainsi simultanément $x \in L_{\mathcal{V}}\mathcal{V}(x)$ et $V \notin F\mathcal{V}(x)$. Par conséquent $V \in \mathcal{V}_{L\mathcal{V}}(x)$. Finalement $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_{L\mathcal{V}} \subseteq F\mathcal{V}$ d'où la thèse puisque $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}} \in \mathbb{V}_{ah}$. ∎

$\mathcal{V}_{L\mathcal{V}}$ est aussi le plus grand élément de $\mathbb{V}$ qui ait la même fermeture antihéréditaire que $\mathcal{V}$. Or si $F\mathcal{V} = F\mathcal{V}'$, $L_{\mathcal{V}} = L_{\mathcal{V}'}$. Par conséquent :

<u>THEOREME 4</u> : $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}}$ est le plus grand des éléments $\mathcal{V}'$ de $\mathbb{V}$ tels que $L_{\mathcal{V}'} = L_{\mathcal{V}}$.

<u>THEOREME 5</u> : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{L\mathcal{V}}$ si et seulement si $\mathcal{V}$ est antihéréditaire.

Cela découle immédiatement du théorème 3.

On peut de même construire $L_{\mathcal{V}L} \in \mathbb{L}$ à partir de $\mathcal{V}_L \in \mathbb{V}$.

<u>THEOREME 6</u> :

1°) $L = L_{\mathcal{V}L}$.

2°) $L_{\mathcal{V}L}$ est le plus grand des éléments de L' de $\mathbb{L}$ tels que $\mathcal{V}_L = \mathcal{V}_{L'}$.

Démonstration.

1°) $V \in \mathcal{V}_L(x) \iff \forall \mathcal{B} \in \mathcal{A},\ x \in L\mathcal{B} \Longrightarrow V \in F\mathcal{B}$. En portant $\mathcal{V}_L$ à la place de $\mathcal{V}$ dans (5) il vient

$$x \in L_{\mathcal{V}L}\mathcal{Q} \iff \forall V \subseteq E,\ (\forall \mathcal{B} \in \mathcal{Q}, x \in L\mathcal{B} \Longrightarrow V \in F\mathcal{B}) \Longrightarrow V \in F\mathcal{Q}. \quad (10)$$

Supposons maintenant $x \in L\mathcal{Q}$. Alors $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{A}$, $x \in L\mathcal{B} \Longrightarrow V \in F\mathcal{B}$ implique $V \in F\mathcal{Q}$. Et donc, par (10), $x \in L_{\mathcal{V}L}\mathcal{Q}$.

2°) Si $\mathcal{V}_L = \mathcal{V}_{L'}$, alors $L_{\mathcal{V}L} = L_{\mathcal{V}L'}$ et comme $L' \subseteq L_{\mathcal{V}L'}$ on a $L' \subseteq L_{\mathcal{V}L}$. Inversément $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}L} = \mathcal{V}_L$ par le théorème 5. ∎

<u>DEFINITION 2</u> : Un élément L de $\mathcal{L}$ est dit <u>maximal</u> si et seulement si $\forall L' \in \mathcal{L}$, $\mathcal{V}_{L'} = \mathcal{V}_L \implies L' \subseteq L$.

<u>THEOREME 7</u> :

1°) $L_{\mathcal{V}L}$ est maximal.

2°) $L = L_{\mathcal{V}L}$ si et seulement si L est maximal.

Démonstration.

1°) Si $\mathcal{V}_{L'} = \mathcal{V}_{L\mathcal{V}L}$ alors $\mathcal{V}_{L'} = \mathcal{V}_L$ par le théorème 5. Alors, par le théorème 6. 2°, $L' \subseteq L_{\mathcal{V}L}$.

2°) Si L est maximal, $L = L_{\mathcal{V}L}$ puisque $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}L} = \mathcal{V}_L$ et $L_{\mathcal{V}L} \supseteq L$. Inversément $L_{\mathcal{V}L}$ est maximal. ▮

<u>THEOREME 8</u> : L est maximal si et seulement si L vérifie la proposition (3).

<u>LEMME</u>: Si L vérifie (3), alors L vérifie (2).

Démonstration du lemme. Supposons $x \in L\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sub $\mathcal{A}$. Alors, la relation sub étant transitive, $\forall \mathcal{B}'$ sub $\mathcal{A}'$ on a aussi $\mathcal{B}'$ sub $\mathcal{A}$. Donc, si L vérifie (3), $\forall \mathcal{B}'$ sub $\mathcal{A}'$, $\exists \mathcal{B}'' \in \mathcal{A}$ dans $\cup \mathcal{B}'$: $x \in L\mathcal{B}''$ ce qui, par (3) encore, est précisément $x \in L\mathcal{A}'$. ▮
Nous sommes donc autorisés, lorsque nous supposons (3), à utiliser (2).

Démonstration du théorème. $L_{\mathcal{V}L} \in \mathcal{L}_m$. Donc si L est maximal, $L = L_{\mathcal{V}L}$ (théorème 7.2°) et L vérifie (3). D'autre part on a toujours $L \subseteq L_{\mathcal{V}L}$ (théorème 6.1°). Il reste donc à démonter que si L vérifie (3), alors $L \geq L_{\mathcal{V}L}$. Pour ce faire, transformons d'abord (10) en substituant X à $\sim V$, en retournant l'implication et en passant de F à G par le théorème 2-N.1. Il vient ainsi

$$x \in L_{\mathcal{V}L}\mathcal{A} \iff \forall X \subseteq E,\ X \in G\mathcal{A} \implies \exists \mathcal{B} \in \mathcal{A} :\ x \in L\mathcal{B} \,\&\, X \in G\mathcal{B}. \quad (11)$$

Supposons maintenant $x \in L_{\mathcal{V}L}\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sub $\mathcal{A}$, donc $G\mathcal{A}' \subseteq G\mathcal{A}$. On a $\bigcup\mathcal{A}' \in G\mathcal{A}'$ et donc $\bigcup\mathcal{A}' \in G\mathcal{A}$. Alors, par (11), $\exists \mathcal{B} \in \mathcal{A}$: $x \in L\mathcal{B} \,\&\, \bigcup\mathcal{A}' \in G\mathcal{B}$. De là, par le théorème 2-N.8, $\exists\, \mathcal{A}''$ sub $\mathcal{B}$ dans $\bigcup\mathcal{A}'$ et si L vérifie (3) on a, par (2), $x \in L\mathcal{A}''$. Finalement $\forall \mathcal{A}'$ sub $\mathcal{A}$, $\exists\, \mathcal{A}''$ dans $\bigcup\mathcal{A}'$: $x \in L\mathcal{A}''$ ce qui est, par (3) encore, $x \in L\mathcal{A}$. ∎

<u>THEOREME 9</u> : Etant donné une application $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ vérifiant la proposition (3), on peut trouver un et un seul espace m-topologique dont L soit la convergence, c'est $(E, \mathcal{V}_L)$.

Démonstration. La convergence de l'espace $(E, \mathcal{V}_L)$ est $L_{\mathcal{V}L}$. Or L, vérifiant (3), est maximal (théorème 8) et donc (théorème 7, 2°) $L = L_{\mathcal{V}L}$. Si L est aussi la convergence de l'espace $(E, \mathcal{V}')$ alors $L = L_{\mathcal{V}'}$. $\mathcal{V}'$ étant une m-topologie, $\mathcal{V}_{L_{\mathcal{V}'}} = \mathcal{V}'$ (théorème 5) et donc $\mathcal{V}_L = \mathcal{V}'$. ∎

<u>RELATIONS DE LA CONVERGENCE AVEC LES AUTRES CONCEPTS DE LA STRUCTURE D'ESPACE m-TOPOLOGIQUE.-</u>

<u>THEOREME 10</u> : Soit E un espace m-topologique. On a les propositions suivantes :

$$x \in L\mathcal{Q} \iff \forall V \subseteq E,\ V \in \mathcal{V}(x) \implies V \in F\mathcal{Q}, \qquad (12)$$

$$V \in \mathcal{V}(x) \iff \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A},\ x \in L\mathcal{Q} \implies V \in F\mathcal{Q}, \qquad (13)$$

$$x \in L\mathcal{Q} \iff \forall X \subseteq E,\ x \in iX \implies X \in F\mathcal{Q}, \qquad (14)$$

$$x \in iX \iff \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A},\ x \in L\mathcal{Q} \implies X \in F\mathcal{Q}, \qquad (15)$$

$$x \in L\mathcal{Q} \iff \forall X \subseteq E,\ X \in G\mathcal{Q} \implies x \in aX, \qquad (16)$$

$$x \in aX \iff \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A} : X \in G\mathcal{Q}\ \&\ x \in L\mathcal{Q} \qquad (17)$$

et

$$x \in aX \iff \exists \mathcal{Q} \in \mathcal{A} \text{ dans } X : x \in L\mathcal{Q}. \qquad (18)$$

Démonstration. (12) est essentiellement la définition de L. Le second membre de l'équivalence (13) définit $\mathcal{V}_L$. Par le théorème 9, $(E, \mathcal{V}_L)$ est le seul espace dont L soit la convergence et donc $\mathcal{V} = \mathcal{V}_L$ ce qui démontre (13). On passe de (12) à (14) et de (13) à (15) en faisant usage de 1-1(1). De même (16) se démontre à partir de (14) au moyen de 1-1(3). Il vient ainsi $x \in L\mathcal{Q}$ $\iff \forall X \subseteq E,\ x \in a\sim \implies X \in F\mathcal{Q}$. On passe à (16) en substituant X à $\sim X$ et en passant de F à G par le théorème 2-N.1.
De même le second membre de (17) est la négation de l'expression par (15) de $x \in i\sim X$. C'est donc bien $x \in aX$. (18) n'est qu'une variante simple de (17) en effet $\cup\mathcal{Q} \subseteq X$ implique $X \in G\mathcal{Q}$ et inversement, si $X \in G\mathcal{Q}$, alors (théorème 2-N.8) $\exists\ \mathcal{Q}'$ sub $\mathcal{Q}$ dans X; si $x \in L\mathcal{Q}$, $x \in L\mathcal{Q}'$. ∎

§3. OUVERTS ET FERMES

Soit E un espace m-topologique.

THEOREME 1 :

1°) Si $\mathcal{O}$ est une famille d'ensembles ouverts, alors $\bigcup \mathcal{O}$ est un ouvert.

2°) Si $\mathcal{F}$ est une famille de fermés, alors $\bigcap \mathcal{F}$ est un fermé.

Démonstration.

1°) Supposons $x \in \bigcup \mathcal{O}$, c'est-à-dire $\exists O \in \mathcal{O} : x \in O$. Comme O est ouvert, $x \in O \implies x \in iO$ et donc, i étant monotone $x \in O \implies x \in i\bigcup \mathcal{O}$. Ainsi $x \in \bigcup \mathcal{O} \implies x \in i\bigcup \mathcal{O}$.

2°) $\{\sim F \mid F \in \mathcal{F}\}$ est une famille d'ouverts (théorème 1-1.3) et donc $\bigcap \mathcal{F} = \sim \bigcup \{\sim F \mid F \in \mathcal{F}\}$ est le complémentaire d'un ouvert par le 1° de ce théorème. Alors (théorème 1-1.3) $\bigcap \mathcal{F}$ est fermé. ∎

THEOREME 2 :

1°) Si un ouvert O est contenu dans l'ensemble X, il est également contenu dans son intérieur.

2°) Si un fermé F contient X il contient également son adhérence.

Démonstration.

1°) i étant monotone, $\mathcal{O} \subseteq X \implies i\mathcal{O} \subseteq iX$. Or $\mathcal{O}$ est ouvert donc $\mathcal{O} \subseteq i\mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subseteq X \implies \mathcal{O} \subseteq iX$.

2°) De même si F est fermé $F \supseteq X \implies F \supseteq aF \supseteq aX$. ▌

THEOREME 3 :

1°) F est fermé si et seulement si tout système rare dont F rencontre tous les éléments a ses points limites dans F.

2°) F est fermé si et seulement si tout système rare dans F a ses points limite dans F.

Démonstration. Soit à démontrer :

1°) F fermé $\implies \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A},\ F \in G\mathcal{Q} \implies L\mathcal{Q} \subseteq F$ (1)

et $(\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A},\ F \in G\mathcal{Q} \implies L\mathcal{Q} \subseteq F) \implies$ F fermé (2)

2°) F fermé $\implies \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A}$ dans F, $L\mathcal{Q} \subseteq F$ (3)

et $(\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A}$ dans F, $L\mathcal{Q} \subseteq F) \implies$ F fermé (4)

Par 2-2(16), $x \in L\mathcal{Q} \implies (F \in G\mathcal{Q} \implies x \quad aF)$. Si F est fermé, $aF \subseteq F$ et donc $x \in L\mathcal{Q}$ & $F \in G\mathcal{Q} \implies x \in F$, ce qui démontre (1). Alors on a aussi (3) puisque $\mathcal{Q}$ dans F implique $F \in G\mathcal{Q}$.

Par 2-2(18), $x \in aF \iff \exists \mathcal{Q}$ dans F : $x \in L\mathcal{Q}$. Alors si $\forall \mathcal{Q}$ dans F, $L\mathcal{Q} \subseteq F$ et si $\exists \mathcal{Q}$ dans F : $x \in L\mathcal{Q}$ on a $x \in F$.

Ainsi $x \in aF \implies x \in F$ et F est fermé. On a donc (4). Alors on a aussi (2) puisque $\mathcal{Q}$ dans F implique $F \in G\mathcal{Q}$ et donc $\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A}$,

$F \in G\mathcal{Q} \implies L\mathcal{Q} \subseteq F$ implique $\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{Q}$ dans F $\implies L\mathcal{Q} \subseteq F$. ▌

CONTINUITE.-

Soient $(E,\mathcal{V})$ et $(E',\mathcal{V}')$ deux espaces m-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$. Notons a' et L' la fonction d'adhérence et la convergence de l'espace $(E',\mathcal{V}')$.

THEOREME 4 : Les propositions

$$\forall X \subseteq E,\ f\,a\,X \subseteq a'fX \tag{5}$$

et $$\forall \mathcal{a} \in \mathcal{A}_E,\ fL\mathcal{a} \subseteq L'f\mathcal{a} \tag{6}$$

sont équivalentes à la continuité de f.

Démonstration. Par le théorème 2-1.2.2°, (5) équivaut à
$\forall X \subseteq E,\ X \in G\mathcal{V}(x) \Longrightarrow fX \in G\mathcal{V}'(f(x))$.
et la proposition 1-2(1) transformée par le théorème 2-N.5 est

$$\forall X \subseteq E,\ X \in G\,\mathcal{V}(x) \Longrightarrow X \in G\ f^{-1}\mathcal{V}'(f(x)).$$

Or, par la proposition 2-N(29), $fX \in G\,\mathcal{V}'(f(x))$ équivaut précisément à $X \in G\ f^{-1}\mathcal{V}'(f(x))$.

2° On peut développer la proposition (6) par la définition de L en $\forall x \in E, \forall \mathcal{a} \in \mathcal{A}_E,\ \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{a} \Rightarrow \mathcal{V}'(f(x)) \subseteq Ff\mathcal{a}$,
c'est-à-dire, par la proposition 2-N(18),

$$\forall x \in E,\ \forall \mathcal{a} \in \mathcal{A}_E,\ \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{a} \Rightarrow f^{-1}\mathcal{V}'(f(x)) \subseteq F\mathcal{a}. \tag{7}$$

Si l'on suppose la continuité de f on a évidemment (7). Inversément, soit $x \in E$, ou bien $\mathcal{V}(x) = \mathcal{P}(E)$ et donc f est continue en x, ou bien (théorème 2-N.6.1°) $\mathcal{V}(x) \in \mathcal{A}_E$. Dans ce dernier cas, si l'on suppose (7), on a $f^{-1}\mathcal{V}'(f(x)) \subseteq F\mathcal{V}(x)$ puisque $\mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{V}(x)$ et f est donc encore continue au point x. ∎

THEOREME 5 : f est fermée si et seulement si

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{A}_{E}, \ L'f\mathcal{A} \subseteq fL\mathcal{A}. \qquad (8)$$

Démonstration. Par 2-2(16), $y \in L'f\mathcal{A} \iff \forall Y \subseteq E', Y \in Gf\mathcal{A} \implies y \in a'Y$. Alors si $X \subseteq E$ et $X \in G\mathcal{A}$, $fX \in Gf\mathcal{A}$(2-N(32)). Si l'on suppose $y \in L'f\mathcal{A}$, $fX \in Gf\mathcal{A} \implies y \in a'fX$ et, si f est fermée, $y \in faX$. Alors $\exists x \in f^{-1}(y) : x \in aX$. On a ainsi $\forall X \subseteq E, X \in G\mathcal{A} \implies x \in aX$, c'est-à-dire, par 2-2(16) encore $x \in L\mathcal{A}$ et donc $y \in fL\mathcal{A}$. Inversément, par 2-2 (18), $y \in a'fX \iff \exists \mathcal{B} \in \mathcal{A}_{E'}$ dans fX : $y \in L'\mathcal{B}$. Mais $\mathcal{B}$ dans fX impliquant $fX \in G\mathcal{B}$ implique aussi $X \in G f^{-1}\mathcal{B}$, par 2-N(29). Comme $\mathcal{B}$ est dans Imf, $f f^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{B}$. Si l'on suppose (8), $y \in L'ff^{-1}\mathcal{B} \implies y \in fLf^{-1}\mathcal{B}$ et $\exists x \in f^{-1}y : x \in L f^{-1}\mathcal{B}$. Ainsi $y \in a'fX$ implique $\exists \mathcal{A} \in \mathcal{A}_E : X \in G\mathcal{A}$ & $x \in L\mathcal{A}$(en l'occurenc:, $f^{-1}\mathcal{B}$) c'est-à-dire, par 2-2(17), $x \in aX$ et donc $y \in f\ aX$. ∎

Soient $(E,\mathcal{V})$ un espace m-topologique, $(E', \mathcal{V}')$ un espace general-topologique et f une application : $E \longrightarrow E'$.

THEOREME 6 : f est continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$ si et seulement si elle est continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',F\mathcal{V}')$.

Démonstration. On a $f^{-1}\mathcal{V}'(f(x)) \subseteq f^{-1}F\mathcal{V}'(f(x))$ et, par 2-N(22) $f^{-1}F\mathcal{V}'(f(x)) \subseteq F f^{-1}\mathcal{V}'(f(x))$. Ainsi $f^{-1}\mathcal{V}'(f(x))$ et $f^{-1}F\mathcal{V}'(f(x))$ ont même fermeture antihéréditaire. Alors comme $\mathcal{V}(x)$ est supposé antihéréditaire, $f^{-1}\mathcal{V}'(f(x)) \subseteq \mathcal{V}(x)$ si et seulement si $f^{-1}F\mathcal{V}'(f(x)) \subseteq \mathcal{V}(x)$. ∎

Soient $(E,\mathcal{V})$ un espace general-topologique, $(E',\mathcal{V}')$ un espace **m-topolotique** et f une application : $E \longrightarrow E'$.

<u>THEOREME 7</u> : f est ouverte : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$ si et seulement si elle est ouverte : $(E,F\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$.

Démonstration. On a $f\mathcal{V}(x) \subseteq fF\mathcal{V}(x) \subseteq Ff\mathcal{V}(x)$. (cette dernière inclusion par 2-N(25)) et donc $f\mathcal{V}(x)$ et $fF\mathcal{V}(x)$ ont même fermeture antihéréditaire. Alors, $\mathcal{V}'(f(x))$ étant antihéréditaire, $f\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}'(f(x))$ équivaut à $fF\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}'(f(x))$. ▌

<u>COMPARAISON DES m-TOPOLOGIES.-</u>

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux m-topologies sur un ensemble E. Nous noterons L' la convergence de l'espace $(E,\mathcal{V}')$.

<u>THEOREME 8</u> : $\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{V}'$ si et seulement si

$$\forall \mathfrak{a} \in \mathcal{A},\ L\mathfrak{a} \subseteq L'\mathfrak{a}. \tag{9}$$

Démonstration. $\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{V}'$ si et seulement si l'identité sur E est continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E,\mathcal{V}')$. Or (9) est simplement l'expression (6) de la continuité de l'identité. ▌

RELATIVISATION.-

Soient E un espace m-topologique et D une partie de E. La general-topologie $\mathcal{V}_D$ induite sur D par la general-topologie de E est évidemment une m-topologie.
En effet soit $x \in D$ et $W \subseteq D$. Si $W \supseteq V \cap D$ où $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $W = W' \cap D$ pour un certain W' contenant V.

DEFINITION 1 : Nous appellerons m-topologie induite sur D par la m-topologie de E la general-topologie $\mathcal{V}_D$ induite sur D par cette m-topologie.

On a toujours la formule 1-2(11) du théorème 1-2.10 mais toujours pas nécessairement l'égalité puisque le contrexemple fourni était un espace topologique (donc en particulier m-topologique)

Au contraire on a maintenant l'égalité dans 1-2(12).

THEOREME 9 : L'adhérence induite d'une partie X de D est l'intersection avec D de l'adhérence de X dans l'espace E.

Démonstration. Appelons a_D l'adhérence dans $(D, \mathcal{V}_D)$ et, pour $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(D)$, $G_D \mathcal{A} \underset{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq D \,\&\, \forall A \in \mathcal{A},\ A \cap Y \neq \emptyset$. Soient $x \in D$ et $X \subseteq D$. 2-N(29) donne $X \in G_D j^{-1}\mathcal{V}(x) \iff jX \in G\mathcal{V}(x)$. Mais $j^{-1}\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_D(x)$ et $j\,X = X$. On a donc $X \in G\,\mathcal{V}_D(x) \iff X \in G\,\mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire, par le théorème 2-1.2.2°, $x \in a_D X \iff x \in aX$.
Comme $x \in a_D X \implies x \in D$ on a bien $a_D X = aX \cap D$. ∎

<u>THEOREME 10</u> : L'ensemble des points limite dans l'espace $(D, \mathcal{V}_D)$ d'un système rare $\mathcal{Q}$ sur D est l'intersection avec D, de l'ensemble des points limite de $\mathcal{Q}$ dans l'espace E.

Démonstration. Appelons L_D la convergence de l'espace $(D, \mathcal{V}_D)$ et, pour $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(D)$, $F_D \mathcal{Q} \underset{\text{déf}}{=} \{X \mid X \subseteq D \;\&\; \exists A \in \mathcal{Q} : A \subseteq X\}$.
Soient $x \in D$ et $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}_D$. 2-N(18) donne $j^{-1}\mathcal{V}(x) \subseteq F_D \mathcal{Q} \iff \mathcal{V}(x) \subseteq Fj\mathcal{Q}$.
On a donc $\mathcal{V}_D(x) \subseteq F_D \mathcal{Q} \iff \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{Q}$, c'est-à-dire $x \in L_D \mathcal{Q} \iff x \in L\mathcal{Q}$. Comme $x \in L_D \mathcal{Q} \Rightarrow x \in D$ on a bien $L_D \mathcal{Q} = L\mathcal{Q} \cap D$. ▮

<u>THEOREME 11'</u> : L'injection canonique d'inclusion $j : D \longrightarrow E$ est fermée si et seulement si D est un ensemble fermé dans E.

Démonstration. Si D est fermé et si $X \subseteq D$, $aX \subseteq D$ (théorème 2.2°) et le théorème 9 donne $a_D X = aX$, c'est-à-dire, puisque j est l'identité sur D, $ajX = j a_D X$. On a donc en particulier $\forall X \subseteq D$, $ajX \subseteq j a_D X$, c'est-à-dire j est fermée. Inversément, si j est fermée, $a D \subseteq a_D D$ et comme $a_D D \subseteq D$ on a $aD \subseteq D$ et D est fermé. ▮

<u>COROLLAIRES</u>.

1°) D est fermé si et seulement si $\forall X \subseteq D$, $a_D X = a X$.

2°) D est fermé si et seulement si $\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{A}_D$, $L_D \mathcal{Q} = L\mathcal{Q}$.

Démonstration.

1°) L'inclusion $a_D X \subseteq aX$ a lieu par le théorème 9 et l'inclusion opposée équivaut à j est fermée, c'est-à-dire (théorème 11) D est fermée.

2°) L'inclusion $L_D \mathfrak{A} \subseteq L\mathfrak{A}$ a lieu par le théorème 10 et l'inclusion opposée équivaut à j est fermée (théorème 5). ▮

SYSTEMES FONDAMENTAUX DE VOISINAGES.-

Soit $(E, \mathcal{V})$ un espace m-topologique. Si $\mathcal{W}$ est une application : $E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ telle que $F\mathcal{W} = \mathcal{V}$ on peut caractériser entièrement la structure de l'espace $(E, \mathcal{V})$ à partir de $\mathcal{W}$ en écrivant partout $F\mathcal{W}$ au lieu de $\mathcal{V}$. Dans certains cas on pourra même écrire $\mathcal{W}$ pour $\mathcal{V}$.

DEFINITION 2 :

1°) $\mathcal{S}$ est un système fondamental de voisinages de x si et seulement si $F\mathcal{S} = \mathcal{V}(x)$.

2°) $\mathcal{W}$ est une base locale de la m-topologie $\mathcal{V}$ si et seulement si $\mathcal{W}$ est une application : $E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ qui associe à tout point x un système fondamental $\mathcal{W}(x)$, c'est-à-dire si $F\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

THEOREME 12 : Un point x adhère à l'ensemble X si et seulement si X rencontre tous les éléments d'un système fondamental de voisinages de X.

Démonstration. $G\mathcal{Q} = GF\mathcal{Q}$ par le théorème 2-N.5. Alors si $F\mathcal{S} = \mathcal{V}(x)$, $G\mathcal{S} = G\mathcal{V}(x)$ et par le théorème 2-1.2.2°, $X \in G\mathcal{S} \Longleftrightarrow x \in_a X$. ∎

<u>THEOREME 13</u> : x est point limite du système rare $\mathcal{Q}$ si et seulement si la fermeture antihéréditaire de $\mathcal{Q}$ contient un système fondamental de voisinages de x.

Démonstration. $\mathcal{S} \subseteq F\mathcal{Q} \Longleftrightarrow F\mathcal{S} \subseteq F\mathcal{Q}$ par le théorème 2-N.5. Alors si $F\mathcal{S} = \mathcal{V}(x)$, $\mathcal{S} \subseteq F\mathcal{Q} \Longleftrightarrow \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{Q}$, c'est-à-dire $\mathcal{S} \subseteq F\mathcal{Q} \Longleftrightarrow x \in L\mathcal{Q}$. ∎

Soient E et E' deux espaces m-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$. Soient $\mathcal{S}$ un système fondamental de voisinages d'un point x de E et $\mathcal{S}'$ un système fondamental de voisinages de f(x).

<u>THEOREME 14</u> : f est continue au point x si et seulement si l'image inverse par f de tout élément de $\mathcal{S}'$ contient un élément de $\mathcal{S}$.

Démonstration. La thèse peut s'écrire $\forall V \in \mathcal{S}'$, $f^{-1}V \in F\mathcal{S}$ et on peut démontrer, comme pour le théorème 6, que cette proposition équivaut à $\forall V \in F\mathcal{S}'$, $f^{-1}V \in F\mathcal{S}$ ce qui est bien la continuité de f au point x. ∎

---

m-TOPOLOGIE ASSOCIEE A UNE general-TOPOLOGIE.-

Soit E un ensemble. Une base locale de m-topologie est elle-même une general-topologie. Ceci conduit à associer de manière naturelle une m-topologie à une general-topologie, à savoir : interpréter la general-topologie comme une base locale.

DEFINITION 3 : Nous appellerons m-topologie associée à une general-topologie $\mathcal{V}$ la m-topologie $F\mathcal{V}$.
Nous dirons aussi que $(E,F\mathcal{V})$ est l'espace m-topologique associé à l'espace $(E,\mathcal{V})$.

La m-topologie associée étant une fermeture antihéréditaire, on a le 1° du théorème suivant :

THEOREME 15 :

1°) La m-topologie associée à une general-topologie est la moins fine de toutes les m-topologies plus fines que cette general-topologie.

2°) La fonction d'intérieur de l'espace m-topologique associé à un espace general-topologique est la plus petite de toutes les fonctions monotones croissantes : $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ dominant la fonction d'intérieur de cet espace general-topologique.

3°) La fonction d'adhérence de l'espace m-topologique associé est la plus grande de toutes les fonctions monotones dominées par la fonction d'adhérence de l'espace general-topologique.

Démonstration.

1°) Soit $i_{\mathcal{V}}$ la fonction d'intérieur d'un espace general-topologique $(E,\mathcal{V})$ et soit $i_{F\mathcal{V}}$ celle de l'espace $(E,F\mathcal{V})$. Supposons $i' \supseteq i$ et $i' \in \mathcal{F}_m$. Alors (théorème 2-1.3) i' est la fonction d'intérieur d'un espace m-topologique $(E,\mathcal{V}')$ et, par le théorème 1-2.5, $\mathcal{V}' \supseteq \mathcal{V}$. Alors (1° de ce théorème) $\mathcal{V}' \supseteq F\mathcal{V}$ et $i' \supseteq i_{F\mathcal{V}}$

2°) Soit $a_{\mathcal{V}}$ la fonction d'adhérence de l'espace general-topologique $(E,\mathcal{V})$ et soit $a_{F\mathcal{V}}$ celle de l'espace $(E,F\mathcal{V})$. Supposons $a' \subseteq a$ et $a' \in \mathcal{F}_m$. On a, comme au 2°, $a' \subseteq a_{F\mathcal{V}}$. ∎

Soient $(E,\mathcal{V})$ et $(E',\mathcal{V}')$ deux espaces general-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$

<u>THEOREME 16</u> : Si f est continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$, alors f est continue pour les espaces m-topologiques associés, c'est-à-dire f est continue : $(E, F\mathcal{V}) \longrightarrow (E',F\mathcal{V}')$.

Démonstration. f est continue $(E, F\mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}')$ parce que $F\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{V}$ (théorème 1-2.7.2°). Alors f est continue $(E, F\mathcal{V}) \longrightarrow (E, F\mathcal{V}')$ par le théorème 6. ∎

On passe très facilement d'un espace general-topologique à l'espace m-topologie associé dans l'étude des rapports entre les différents concepts initiaux possibles lorsqu'on emploie de "mauvaises définitions". Ainsi, par exemple, si $\mathcal{V}$ est une general-topologie sur E, la fonction $a'_{\mathcal{V}}$ définie par

$$x \in a'_{\mathcal{V}} X \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} X \in G\,\mathcal{V}(x)$$

n'est pas la fonction d'adhérence de l'espace $(E, \mathcal{V})$ mais bien (théorème 12) celle de l'espace m-topologique associé.

De même, si l'on utilise 2-2(5) pour essayer de définir une convergence dans un espace general-topologique, la fonction $L_{\mathcal{V}}$ ainsi obtenue est en fait la convergence de l'espace m-topologie associé. En effet, $L_{\mathcal{V}}$ est maximal (2-2(8) et théorème 2-2.8), donc $L_{\mathcal{V}} = L_{\mathcal{V}_{L\mathcal{V}}}$ (théorème 2-2.7.2°). Or $\mathcal{V}_{L\mathcal{V}} = F\mathcal{V}$ (théorème 2.2.3) et donc $L_{\mathcal{V}} = L_{F\mathcal{V}}$. Cette "convergence" serait commune à tous les espaces general-topologiques qui ont même espace m-topologique associé et ne pourrait donc pas être considérée comme caractéristique de la structure d'espace general-topologique.

Tout ceci illustre le fait, d'ailleurs bien évident, que le passage à la m-topologie associée confond plusieurs general-topologies. Il y a là, en un certain sens que nous allons préciser maintenant, un processus de quotient.

L'ENSEMBLE DES m-TOPOLOGIES SUR E COMME QUOTIENT DE L'ENSEMBLE DES general-TOPOLOGIES SUR E.

Les considérations de l'avant-dernière section de la note 2-N font apparaître l'opération F comme une application : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}_{ah} : \mathcal{V} \curvearrowright F\mathcal{V}$. Cette application est en fait une rétraction de l'injection canonique d'inclusion de $\mathcal{V}_{ah}$ dans puisque, si $\mathcal{V}$ est antihéréditaire, $F\mathcal{V} = \mathcal{V}$. C'est donc une surjection. $\mathcal{V}_{ah}$ apparait donc comme un quotient de $\mathcal{V}$ par F en ce sens que chaque classe d'équivalence pour la relation ($F\mathcal{V} = F\mathcal{V}'$) a un et un seul représentant dans $\mathcal{V}_{ah}$, c'est la fermeture antihéréditaire commune de tous les éléments de cette classe d'équivalence.

On peut aller plus loin et faire apparaître F comme un **foncteur** surjectif de la catégorie des espaces general-topologiques sur la catégorie des espaces m-topologiques.

LA CATEGORIE DES ESPACES m-TOPOLOGIQUES COMME QUOTIENT DE LA CATEGORIE DES ESPACES general-TOPOLOGIQUES.-

DEFINITION 4 : Nous appellerons morphisme d'espaces general-topologiques tout triple ($\mathcal{V}$, f, $\mathcal{V}'$) tel que

1°) $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont des general-topologies — soient E le domaine de $\mathcal{V}$ et E' celui de $\mathcal{V}'$ —;

2°) f est une application continue : $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}')$.

On va définir le produit de la manière évidente.

DEFINITION 5 : Deux morphismes ($\mathcal{V}$, f, $\mathcal{V}'$) et ($\mathcal{W}$, g, $\mathcal{W}'$) seront dits composables si et seulement si $\mathcal{V}' = \mathcal{W}$.

<u>DEFINITION 6</u> : Si $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ et $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ sont deux morphismes composables, leur <u>composé</u> est défini par

$$(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') * (\mathcal{W}, g,\mathcal{W}') \underset{\text{déf}}{=} (\mathcal{V},f * g,\mathcal{W}') \qquad (10)$$

où $f*g \underset{\text{déf}}{=} g\circ f$.

Cette définition a un sens en effet $\mathcal{V}' = \mathcal{W}$ implique en particulier dom $\mathcal{V}'$ = dom $\mathcal{W}$ et donc f et g sont composables pour le produit de composition habituel. De plus le composé est encore un morphisme d'espaces general-topologiques par le théorème de composition des fonctions continues 1-2.4.1°.

<u>DEFINITION 7</u> : Nous appellerons <u>catégorie des espaces general-topologiques</u> la classe $\mathcal{G}$ de tous les morphismes d'espaces general-topologiques munie de la loi de composition $*$ définie par la proposition (10).

Vérifions que c'est bien une catégorie.

I. Quels que soient les morphismes $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$, $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ et $(\mathcal{X},h,\mathcal{X}')$, les propositions

a) $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ et $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ sont composables & $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ et $(\mathcal{X},h,\mathcal{X}')$ sont composables.

b) $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ et $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}') * (\mathcal{X},h,\mathcal{X}')$ sont composables.

c) $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') * (\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ et $(\mathcal{X},h,\mathcal{X}')$ sont composables.

sont évidemment équivalentes.

II. Lorsque ces composés sont définis,

$(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') * [(\mathcal{W},g,\mathcal{W}') * (\mathcal{X},h,\mathcal{X}')] = [(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')*(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')]$
$* (\mathcal{X},h,\mathcal{X}')$, puisque les deux membres sont égaux à
$(\mathcal{V},f*g*h,\mathcal{X}')$.

<u>DEFINITION 8</u> : Un morphisme $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ est dit <u>neutre</u> si et seulement si, $\forall(\mathcal{W},g,\mathcal{W}') \in \mathcal{G}$,

1°) lorsque $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ est composable à droite avec $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$, alors $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')*(\mathcal{W},g,\mathcal{W}') = (\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$;

2°) lorsque $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ est composable à gauche avec $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$, alors $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')*(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') = (\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$.

III. Pour chaque $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ dans $\mathcal{G}$, il existe un morphisme neutre composable à droite avec $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ — C'est $(\mathcal{V}'. 1, \mathcal{V}')$ où I est l'identité sur dom $\mathcal{V}'$ — et il existe un neutre composable à gauche avec $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ — c'est $(\mathcal{V},1,\mathcal{V})$ où 1 est l'identité sur dom $\mathcal{V}$ —.

On peut d'ailleurs montrer que tout morphisme neutre est de la forme $(\mathcal{V},1,\mathcal{V})$

<u>THEOREME 17</u> : Un morphisme $(\mathcal{V}, f, \mathcal{V}')$ est neutre si et seulement si $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$ et f est l'identité sur dom $\mathcal{V}$.

Démonstration. $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V})$ est évidemment neutre. Inversément $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V})$ et $(\mathcal{V}, f, \mathcal{V}')$ sont composables. Donc, $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V})$ étant neutre, $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V}) * (\mathcal{V}, f, \mathcal{V}') = (\mathcal{V}, f, \mathcal{V}')$. Si d'autre part on suppose que $(\mathcal{V}, f, \mathcal{V}')$ est neutre, $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V}) * (\mathcal{V}, f, \mathcal{V}') = (\mathcal{V}, I, \mathcal{V})$. Par conséquent $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$ et $f = I$. ∎

<u>DEFINITION 9</u> : Nous appellerons <u>morphisme d'espaces m-topologiques</u> un morphisme $(\mathcal{V}, f, \mathcal{V}')$ de $\mathcal{G}$ où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont des m-topologi es.

<u>DEFINITION 10</u> : Nous appellerons <u>catégorie des espaces m-topologiques</u> la classe $\mathcal{M}$ de tous les morphismes d'espaces m-topologiques munie de la loi * restreinte de $\mathcal{G}$.

<u>THEOREME 18</u> : $\mathcal{M}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{G}$.

Démonstration. Si $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V})$ est un neutre de $\mathcal{G}$ composable avec un élément de $\mathcal{M}$,alors $\mathcal{V}$ est une m-topologie et donc $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V}) \in \mathcal{M}$. De plus, $\mathcal{M}$ est stable pour la loi *. ∎

En identifiant un morphisme $(\mathcal{V}, I, \mathcal{V})$, neutre dans $\mathcal{G}$ avec l'espace (dom $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}$) on voit que les espaces general-topologiques peuvent être considérés comme les "objets" de la catégorie des espaces general-topologiques ce qui justifie cette appellation pour $\mathcal{G}$. De même les espaces m-topologiques apparaissent comme les "objets" de la catégorie des espaces m-topologiques.

<u>THEOREME 19</u> :

1°) L'application F : $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}$ définie par $F(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') \underset{\text{déf}}{=} (F\mathcal{V},f,F\mathcal{V}')$ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{G}$ dans la catégorie $\mathcal{M}$.

2°) Ce foncteur est surjectif.

3°) Ce foncteur est fidèle.

Démonstration.

1°) L'image d'un neutre $(\mathcal{V},I,\mathcal{V})$ de $\mathcal{G}$ est $(F\mathcal{V},I,F\mathcal{V})$ neutre de $\mathcal{M}$. D'autre part, si $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ et $(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ sont composables, alors $F(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ et $F(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')$ sont également composables. De plus $F(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')* F(\mathcal{W},g,\mathcal{W}') = F\left[(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')*(\mathcal{W},g,\mathcal{W}')\right]$, en effet les deux composés sont égaux à $(F\mathcal{V},f*g,F\mathcal{W}')$.

2°) F est surjectif puisque c'est une rétraction du foncteur canonique d'inclusion de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{G}$: si $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')\in\mathcal{M}$, alors $F(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') = (\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$.

3°) Appelons Hom $(\mathcal{V},\mathcal{V}')$ l'ensemble $\{(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') \mid (\mathcal{V},f,\mathcal{V}') \in \mathcal{G}\}$. Alors la restriction du foncteur F à Hom $(\mathcal{V},\mathcal{V}')$ est injective, en effet soient $(\mathcal{V},f,\mathcal{V}')$ et $(\mathcal{V},g,\mathcal{V}') \in$ Hom $(\mathcal{V},\mathcal{V}')$, si $f \neq g$, alors $F(\mathcal{V},f,\mathcal{V}') \neq F(\mathcal{V},g,\mathcal{V}')$. ▮

m-TOPOLOGIES PROJECTIVE ET PRODUIT.-

Soient E un ensemble et $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces m-topologiques. Pour chaque i dans I, f_i est une application : $E \longrightarrow E_i$.

Une m-topologie $\mathcal{W}$ sur E rend toutes les f_i continues si et seulement si elle est plus fine que la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$- projective (théorème 1-2.12). Or $F\mathcal{V}$ est la moins fine de toutes les m-topologies plus fines que $\mathcal{V}$. Ceci démontre le théorème suivant :

<u>THEOREME 20</u> : Une m-topologie sur E rend toutes les f_i continues si et seulement si elle est plus fine que la m-topologie associée à la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective.

<u>DEFINITION 11</u>. Nous appellerons m-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$- <u>projective sur</u> E la m-topologie associée à la general-topologie $f_i, \mathcal{V}_i)$-projective.

Par le théorème 20, c'est clairement la moins fine de toutes les m-topologies $\mathcal{W}$ sur E qui rendent toutes les f_i continues : $(E, \mathcal{W}) \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i)$.

<u>THEOREME 21</u> : Soit D un espace m-topologique et f une application : $D \longrightarrow E$. Alors f est continue : $D \longrightarrow (E, F\mathcal{V})$ si et seulement si toutes les applications composées $f_i \circ f$ sont continues : $D \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i)$.

Démonstration. Par le théorème 6, f est continue : $D \longrightarrow (E, F\mathcal{V})$ si et seulement si elle est continue : $D \longrightarrow (E, \mathcal{V})$ et (théorème 1-2.13) elle est continue : $D \longrightarrow (E, \mathcal{V})$ si et seulement si toutes les $f_i \circ f$ sont continues : $D \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i)$. ∎

Un cas particulier important est celui où E est le produit cartésien des E_i. Soit donc encore $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces m-topologiques. Appelons E le produit $\times \{E_i \mid i \in I\}$ et p_k la projection : $E \longrightarrow E_k : x \rightsquigarrow x_k$ du produit sur son k^e composant.

<u>DEFINITION 12</u> : Nous appellerons <u>m-topologie produit des</u> m-topologies $\mathcal{V}_i$ la m-topologie $(p_i, \mathcal{V}_i)$ - projective.

C'est, par le théorème 20, la m-topologie $F\mathcal{V}$ associée à la general-topologie produit $\mathcal{V}$. On dira encore que $(E, F\mathcal{V})$ est l'<u>espace m-topologique produit des</u> espaces $(E_i, \mathcal{V}_i)$.

<u>THEOREME 22</u> : Dans l'espace m-topologique produit $(E, F\mathcal{V})$:

1°) Un point x du produit E adhère à l'ensemble X si et seulement si chaque projection de x adhère à la projection correspondante de X.

2°) Un point x de E est point limite du système rare $\mathfrak{A}$ si et seulement si chaque projection de x est point limite de la projection correspondante de $\mathfrak{A}$.

Démonstration.

1°) $x \in aX \iff X \in G\mathcal{V}(x)$ par le théorème 12.
Si $X \in G\mathcal{V}(x)$ alors en particulier $X \in Gp_k^{-1}\mathcal{V}_k(x_k)$ puisque $\mathcal{V}(x) \supseteq p_k^{-1}\mathcal{V}_k(x_k)$. Mais par 2-N (29), $X \in G\, p_k^{-1}\mathcal{V}_k(x_k)$ équivaut à $p_k X \in G\,\mathcal{V}_k(x_k)$ c'est-à-dire $x_k \in a_k p_k X$.
Inversément, comme $x_k \in a_k p_k X$ équivaut à $X \in G\, p_k^{-1}\mathcal{V}_k(x_k)$, $\forall i \in I$, $x_i \in a_i p_i X$ implique $X \in G \bigcup \{ p_i^{-1}\mathcal{V}_i(x_i) \mid i \in I \}$, c'est-à-dire $X \in G\mathcal{V}(x)$.

2°) Par la continuité de p_k, $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{A}_E$, $p_k L\mathcal{A} \subseteq L_k p_k \mathcal{A}$ et donc $x \in L\mathcal{A}$ implique $x_k \in L_k p_k \mathcal{A}$. Inversément $x_k \in L_k p_k \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\mathcal{V}_k(x_k) \subseteq F p_k \mathcal{A}$, équivaut, par 2-N(18), à $p_k^{-1}\mathcal{V}_k(x_k) \subseteq F\mathcal{A}$. Si maintenant $\forall i \in I$, $x_i \in L_i p_i \mathcal{A}$, alors $\bigcup \{ p_i^{-1}\mathcal{V}_i(x_i) \mid i \in I \} \subseteq F\mathcal{A}$, c'est-à-dire $\mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{A}$, soit encore $x \in L\mathcal{A}$. ∎

---

m-TOPOLOGIE PROJECTIVE DE m-TOPOLOGIES ASSOCIEES.-

Soit E un ensemble. Soient $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces general-topologiques et les f_i des applications : $E \longrightarrow E_i$. Considérons sur E les trois general-topologies suivantes :

$\mathcal{V}$, la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$- projective,

$\mathcal{V}'$, la general-topologie $(f_i, F\mathcal{V}_i)$-projective,

et la m-topologie $(f_i, F\mathcal{V}_i)$-projective, par définition $F\mathcal{V}'$.

THEOREME 23 : La m-topologie projective $F\mathcal{V}'$ des m-topologies $F\mathcal{V}_i$, associées aux general-topologies $\mathcal{V}_i$, est la m-topologie associée à la general-topologie projective $\mathcal{V}$ de ces general-topologies $\mathcal{V}_i$.

Démonstration. Comme f_i continue: $(E, F\mathcal{V}') \longrightarrow (E_i, F\mathcal{V}_i)$ équivaut à f_i continue : $(E, F\mathcal{V}') \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i)$ (théorème 6), $F\mathcal{V}'$ est aussi la moins fine des m-topologies $\mathcal{W}$ sur E qui rendent continues toutes les f_i : $(E,\mathcal{W}) \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i)$. Or celle-ci est clairement la m-topologie associée à $\mathcal{V}$ (par le corollaire du théorème 1-2.12 et par le théorème 15.1°). ∎

---

m-TOPOLOGIE QUOTIENT.-

Soient $(E,\mathcal{V})$ un espace m-topologique, E' un ensemble et f une application : $E \longrightarrow E'$.

THEOREME 24. La general-topologie $\mathcal{V}_f$, quotient de la m-topologie $\mathcal{V}$ par f, est une m-topologie.

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{V}_f(y)$, c'est-à-dire $f^{-1}V \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$ et supposons $W \geq V$, et donc $f^{-1}W \geq f^{-1}V$. Alors $f^{-1}W \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$ puisque $\mathcal{V}$ est antihéréditaire, c'est-à-dire $W \in \mathcal{V}_f(y)$.

COROLLAIRE. $\mathcal{V}_f$ est la plus fine de toutes les m-topologies $\mathcal{W}$ sur E' qui rendent f continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{W})$.

<u>DEFINITION 13</u> : Nous appellerons <u>m-topologie quotient de</u> la m-topologie $\mathcal{V}$ <u>par</u> f la general-topologie quotient $\mathcal{V}_f$.

L'application f détermine un quotient $\frac{E}{f}$ de l'ensemble E. Soit p la projection canonique : $E \longrightarrow \frac{E}{f}$. Nous dirons encore que $(\frac{E}{f}, \mathcal{V}_p)$ est <u>l'espace m-topologique quotient de l'espace</u> $(E, \mathcal{V})$ <u>par</u> f. Demême si R est une relation d'équivalence sur E, l'espace $(\frac{E}{R}, \mathcal{V}_R)$ sera dit <u>espace m-topologique quotient de</u> $(E, \mathcal{V})$ <u>par</u> R.

Soient $(E, \mathcal{V})$ un espace m-topologique, E' un ensemble et f une application surjective : $E \longrightarrow E'$. Pour obtenir des résultats plus intéressants sur les voisinages et sur l'intérieur dans l'espace quotient, nous avons dû introduire une condition de compatibilité (1-2(20)) qui revenait d'ailleurs (théorème 1-2.22) à exiger que f soit ouverte. Il en sera de même en ce qui concerne la convergence.

<u>DEFINITION 14</u> : Nous dirons que f est <u>anticompatible avec</u> $\mathcal{V}$ si et seulement si

$$\forall X \subseteq E, \ a\ f^{-1} fX \subseteq f^{-1} faX \qquad (11)$$

On peut d'ailleurs mettre la condition de compatibilité (1-2(20) sous une forme plus aisément comparable avec (11). En utilisant 1-1(1) et le théorème 1-2.15, la condition 1-2(20) devient en effet : $\forall X \subseteq E, \ f^{-1} fiX \subseteq if^{-1} fX$.

<u>THEOREME 25</u> : L'application f est fermée $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}_f)$ si et seulement si elle est anticompatible avec $\mathcal{V}$.

Démonstration. (11) équivaut à $\forall X \subseteq E$, $faf^{-1}fX \subseteq faX$. Or (théorème 1-2.21), si a_f est la fonction d'adhérence dans $(E', \mathcal{V}_f)$, $faf^{-1}fX = a_f fX$ et (11) devient $a_f fX \subseteq faX$. ∎

Soit maintenant f une surjection : $E \longrightarrow E'$, anti-compatible avec la m-topologie $\mathcal{V}$ de E. Soient a_f et L_f la fonction d'adhérence et la convergence de l'espace $(E', \mathcal{V}_f)$.

<u>THEOREME 26</u> :

1°) $\forall X \subseteq E$, $a_f fX = faX$.

2°) $\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{A}_E$, $L_f f\mathfrak{A} = f\,L\mathfrak{A}$.

Démonstration. f étant à la fois continue et fermée, le 1° résulte de 1-2(6) et de (5), le 2° de (6) et de (8). ∎

<u>m-TOPOLOGIE QUOTIENT D'UNE m-TOPOLOGIE ASSOCIEE.-</u>

Soient $(E, \mathcal{V})$, un espace general-topologique, E' un ensemble et f une application : $E \longrightarrow E'$. Considérons sur E' les deux general-topologies suivantes :

$\mathcal{V}_f$, la general-topologie quotient de $\mathcal{V}$ par f

et $(F\mathcal{V})_f$, la general-topologie quotient de $F\mathcal{V}$ par f, qui est aussi la m-topologie quotient de $F\mathcal{V}$ par f.
Si f est continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}_f)$, alors par le théorème 1.2. 7.2°, elle est encore continue : $(E,F\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}_f)$ et, $(F\mathcal{V})_f$ étant la plus fine de toutes les general-topologies $\mathcal{V}'$ sur E' telles que f soit continue : $(E,F\mathcal{V})$ $(E',\mathcal{V}')$ on a que $\mathcal{V}_f$ est moins fine que $(F\mathcal{V})_f$, soit encore $F\mathcal{V}_f \subseteq (F\mathcal{V})_f$.

Nous allons montrer que l'on a pas nécessairement l'égalité même lorsque f est surjective. Appelons E l'ensemble formé de deux points distincts $\{x,y\}$ et E' l'ensemble $\{z\}$. Convenons que $\mathcal{V}(x) = \{\{x\}\}$ et $\mathcal{V}(y) = \{\{y\}\}$. $\mathcal{P}(E') = \{\emptyset, E'\}$.
Soit f la surjection constante z. $f^{-1}(z) = E$ et $\mathcal{V}(E) = \emptyset$.

$$\emptyset \notin \mathcal{V}_f(z) \text{ puisque } f^{-1}\emptyset = \emptyset \notin \mathcal{V}f^{-1}(z).$$

$$E' \notin \mathcal{V}_f(z) \text{ puisque } f^{-1}E' = E \notin \mathcal{V}(f^{-1}(z)).$$

Ainsi $\mathcal{V}_f(z) = \emptyset$ et $F\mathcal{V}_f(z) = \emptyset$.

Au contraire $F\mathcal{V}(x) = \{\{x\}, E\}$ et $F\mathcal{V}(y) = \{\{y\}, E\}$ donc $(F\mathcal{V})(E) = \{E\}$.

$$\emptyset \notin (F\mathcal{V})_f(z) \quad \text{puisque } f^{-1}\emptyset = \emptyset \notin (F\mathcal{V})(f^{-1}(z)).$$

$$E' \in (F\mathcal{V})_f(z) \text{ puisque } f^{-1}E' = E \in (F\mathcal{V})(f^{-1}(z)).$$

Ainsi $(F\mathcal{V})_f(z) = \{E'\}$ et l'inclusion $F\mathcal{V}_f \subset (F\mathcal{V})_f$ est stricte.

THOREME 27: Si l'application $f : E \longrightarrow E'$ est une surjection compatible avec $\mathcal{V}$, alors f est compatible avec la m-topologie associée $F\mathcal{V}$.

LEMME. Soit A une partie de E. $F\mathcal{V}(A) \subseteq (F\mathcal{V})(A)$.

Démonstration du lemme. Par 1-2(18), on a

$$X \in \mathcal{V}(A) \iff \forall x \in A,\ X \in \mathcal{V}(x)\ ;$$

$$X \in (F\mathcal{V})(A) \iff \forall x \in A,\ X \in F\mathcal{V}(x).$$

Il est clair que $\mathcal{V}(A) \subseteq (F\mathcal{V})(A)$ puisque $\mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{V}(x)$. D'autre part $(F\mathcal{V})$ est antihéréditaire en effet $Y \supseteq X \in (F\mathcal{V})(A)$ implique $\forall x \in A, Y \supseteq X \in F\mathcal{V}(x)$ et donc $\forall x \in A$, $Y \in F\mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire $Y \in (F\mathcal{V})(A)$. ∎

Démonstration du théorème. Supposons que f est compatible avec $\mathcal{V}$, c'est-à-dire $f^{-1}f\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}(f^{-1}f(x))$, ce qui entraîne $Ff^{-1}f\mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{V}(f^{-1}f(x))$ et donc, par le lemme, $Ff^{-1}f\mathcal{V}(x) \subseteq (F\mathcal{V})(f^{-1}f(x))$. Or $fF\mathcal{V}(x) \subseteq Ff\mathcal{V}(x)$ (2-N(25)) et $f^{-1}Ff\mathcal{V}(x) \subseteq Ff^{-1}f\mathcal{V}(x)$ (2-N(22)). Donc $f^{-1}fF\mathcal{V}(x) \subseteq (F\mathcal{V})(f^{-1}f(x))$ ce qui est la compatibilité relativement à $F\mathcal{V}$. ∎

THEOREME 28 : Si l'application f est une surjection compatible avec $\mathcal{V}$, alors la m-topologie $(F\mathcal{V})_f$, quotient de $F\mathcal{V}$ par f, est la m-topologie $F\mathcal{V}_f$ associée à la general-topologie $\mathcal{V}_f$, quotient de $\mathcal{V}$ par f.

Démonstration. Supposons que $X \in (F\mathcal{V})_f(y)$. f étant surjective, On peut faire $y = f(x)$. D'autre part f étant compatible avec $\mathcal{V}$, donc (théorème 27) avec $F\mathcal{V}$, on a $(F\mathcal{V})_f(f(x)) = fF\mathcal{V}(x)$ par le corollaire du théorème 1-2-23. Donc $X = f\,W$ pour un certain $W \in F\mathcal{V}(x)$. On a alors $W \supsetneq V$ pour un certain $V \in \mathcal{V}(x)$, d'où $X \supsetneq fV$. Mais $fV \in f\mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire, toujours par le même corollaire, $fV \in \mathcal{V}_f(f(x))$. Alors $X \in F\mathcal{V}_f(f(x))$, c'est-à-dire $X \in F\mathcal{V}_f(y)$. Ainsi $(F\mathcal{V})_f \subseteq F\mathcal{V}_f$ et on a vu plus haut que l'inclusion opposée a toujours lieu. ∎

NOTE N'. Nous allons étudier dans le paragraphe suivant la convergence des fonctions selon un système rare donné sur leur domaine et la convergence des fonctions dont le domaine est quasi-ordonné. Cette seconde notion pourra être reliée à la première si l'on peut caractériser entièrement un quasi ordre sur un ensemble par un système rare sur le même ensemble. C'est une correspondance de ce genre entre familles de sous-ensembles et relations binaires que nous allons étudier de manière un peu systématique dans cette note, pour éviter de devoir intercaler dans le paragraphe 2-4 un trop grand nombre de lemmes sur une question qui mérite d'ailleurs une certaine autonomie.

PROPRIETES DES SECTIONS ET DES PARTIES FINALES POUR UNE RELATION BINAIRE TRANSITIVE.-

Soit D un ensemble. Par relation binaire sur D nous voulons dire une partie du produit $D \times D$.

DEFINITION 1. Soit R une relation binaire sur D. On dit que :

1°) R est transitive si et seulement si

$$\forall x,\ y \text{ et } z \in D,\quad [(x,y)\in R \,\&\, (y,z)\in R] \Rightarrow (x,z)\in R;$$

2°) R est réflexive si et seulement si

$$\forall x \in D,\ (x,x)\in R.$$

DEFINITION 2. On appelle quasi-ordre sur D une relation binaire sur D, transitive et réflexive.

Nous utiliserons le plus souvent pour une relation transitive R un symbole tel que $<$, où

$$x<y \underset{\text{déf.}}{\iff} (x,y)\in R.$$

Si R est de plus réflexive, c'est-à-dire si R est un quasi ordre, on écrira plutôt $x \leqslant y$. Nous utiliserons des expressions telles que "plus grand", "précéder", "vers le haut", etc... dans leur sens évident plutôt que "àgauche" et "à droite" et nous écrirons indifféremment $x<y$ et $y>x$, $x \leqslant y$ et $y \geqslant x$.

Lorsque $\leqslant$ est un quasi-ordre sur D, on dit aussi que $(D, \leqslant)$ est <u>un ensemble quasi ordonné</u> ou, plus simplement que D est quasi-ordonné.

Soit D un ensemble muni d'une relation transitive $<$.

<u>DEFINITION 3</u>:

1°) La <u>section vers le haut</u> d'un élément de D est l'ensemble de ses successeurs.

2°) Une partie F de D est dite <u>finale</u> si et seulement si elle comprend, avec un élément de D, tous ses successeurs.

Dans la suite, nous dirons simplement <u>section</u> pour section vers le haut. La section de x sera notée S_x ($S_x(<)$ lorsque la précision est nécessaire). On a ainsi

$$S_x(<) = \{ y \mid y > x \} \tag{1}$$

et F finale $\Longleftrightarrow \forall x \in F,\ S_x \subseteq F.$ (2)

L'ensemble des parties finales sera noté $\mathcal{F}(<)$ et l'ensemble des sections, $\mathcal{S}(<)$.

Par exemple les parties antihéréditaire de $\mathcal{P}(E)$ sont les parties finales de l'ordonné $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$.

Convenons encore de deux notations qui allègeront les écritures. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(D)$,

$$\mathrm{Inter}\ \mathcal{A} \underset{\text{déf}}{=} \{ \cap \mathcal{A}' \mid \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \}$$

et $$\mathrm{Un}\ \mathcal{A} \underset{\text{déf}}{=} \{ \cup \mathcal{A}' \mid \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \}.$$

Ce sont respectivement l'ensemble des intersections de famille d'éléments de $\mathcal{A}$ et l'ensemble des unions de familles d'éléments de $\mathcal{A}$.

<u>THEOREME 1</u> : $\mathcal{F}(<)$ contient $\mathrm{Inter}\,\mathcal{F}(<)$ et $\mathrm{Un}\,\mathcal{F}(<)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}'$ une partie de $\mathcal{F}(<)$.

1°) Supposons $x \in \cup \mathcal{F}'$, c'est-à-dire $\exists F \in \mathcal{F}' : x \in F$. Alors $S_x \subseteq F$, d'où $S_x \subseteq \cup \mathcal{F}'$ et $\cup \mathcal{F}'$ est une partie finale.

2°) Supposons $x \in \bigcap \mathcal{F}'$, c'est-à-dire $\forall F \in \mathcal{F}' : x \in F$. Alors $\forall F \in \mathcal{F}'$, $S_x \subseteq F$, d'où $S_x \subseteq \bigcap \mathcal{F}'$. ∎

Remarque : On vérifie directementque D et $\emptyset$ sont des parties finales. On pourrait aussi le déduire du théorème 1, en écrivant $\emptyset = \bigcup \emptyset$ et $D = \bigcap \emptyset$ ($\emptyset \subseteq \mathcal{F}(<)$), pour autant que l'on admette certaines conventions sur l'intersection de la famille vide.

Remarquons au passage que $\mathcal{F}(<)$ vérifie à la fois les axiomes d'une famille d'ouverts et d'une famille de fermés en topologie. On retrouve en particulier le fait que les parties antihéréditaires de $\mathcal{P}(E)$ sont les fermés d'une topologie sur $\mathcal{P}(E)$.

THEOREME 2 : Une section est une partie finale.

C'est une conséquence immédiate de la transitivité.

DEFINITION 4 : Nous appellerons fermeture réflexive de la relation transitive $<$, la relation notée $\lesssim$ et définie par

$$x \lesssim y \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} (x < y \text{ ou } x = y) \tag{3}$$

Si l'on identifie $<$ à son graphe dans $D \times D$, la fermeture réflexive de $<$ est aussi l'union de $<$ et de la diagonale de $D \times D$. Il est clair que si $\leqslant$ est un quasi-ordre, $\lesssim$ est encore $\leqslant$.

<u>THEOREME 3</u> : $\mathcal{F}(<) = \mathcal{F}(\leqq) = \mathrm{Im}\,\mathcal{S}(\leqq)$.

Démonstration. La proposition $x \in F \implies S_x \subseteq F$ équivaut à $x \in F \iff (S_x \subseteq F \,\&\, x \in F)$. Ainsi $F \in \mathcal{F}(<)$ équivaut à $\forall x \in D$, $x \in F \iff [\{x\} \cup S_x(<)] \subseteq F$ et donc à $F = \bigcup \{\{x\} \cup S_x(<) \mid x \in F\}$.

Inversément si D' est une partie de D, $\bigcup \{\{x\} \cup S_x(<) \mid x \in D'\}$ est une partie finale pour la relation $<$. Or $S_x(\leqq) = \{x\} \cup S_x(<)$. Donc $\mathcal{F}(<) = \mathrm{Im}\,\mathcal{S}(\leqq)$. Cette dernière égalité, démontrée pour une relation transitive quelconque, donne, dans le cas du quasi ordre $\leqq$, $\mathcal{F}(\leqq) = \mathrm{Im}\,\mathcal{S}(\leqq)$. ∎

<u>L'ENSEMBLE DES QUASI-ORDRES SUR D COMME QUOTIENT DE L'ENSEMBLE DES RELATIONS TRANSITIVES SUR D</u>.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des relations transitives sur D et $\mathcal{Q}$ l'ensemble des quasi-ordres sur D. L'application

$$\delta : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{Q} : < \mapsto \delta(<) \underset{\text{déf}}{=} \leqq ,$$

où $\leqq$ est la fermeture réflexive de $<$ définie par (3), est une rétraction de l'injection canonique d'inclusion de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{T}$ puisque la fermeture réflexive d'un quasi-ordre est ce quasi-ordre lui-même. δ est donc surjective. $\mathcal{Q}$ apparaît ainsi comme un quotient de $\mathcal{T}$ par δ en ce sens que chaque classe d'équivalence pour la relation "avoir même fermeture réflexive" a un et un seul représentant dans $\mathcal{Q}$, à savoir la fermeture réflexive commune de tous les éléments de la classe d'équivalence.

On peut aller plus loin et faire apparaître δ comme un foncteur surjectif de la catégorie des relations transitives sur la catégorie des quasi-ordres.

LA CATEGORIE DES QUASI-ORDRES COMME QUOTIENT DE LA CATEGORIE DES RELATIONS TRANSITIVES.-

Convenons d'abord pour alléger les notations que, dans cette section, le symbole $<$ représente indifféremment le couple formé d'un ensemble et d'une relation transitive ou cette relation transitive elle-même. Nous écrirons

$$f : < \longrightarrow <' \tag{4}$$

si et seulement si f est une application de l'ensemble D sous-jacent à $<$ vers l'ensemble D' sous-jacent à $<'$, vérifiant la proposition

$$\forall x \text{ et } y \in D,\ x < y \implies f(x) <' f(y) . \tag{5}$$

Il est clair que $f : < \longrightarrow <'$ entraîne $f : \leq \longrightarrow \leq'$. D'autre part, $f : < \longrightarrow <'$ & $g : <' \longrightarrow <''$ entraîne $g \circ f : < \longrightarrow <''$ puisque $x < y \implies f(x) <' f(y) \implies g(f(x)) <'' g(f(y))$.

Nous dirons que le triple $(<, f, <')$ est <u>un morphisme de relations transitives</u> si et seulement si on a $f : < \longrightarrow <'$. Nous dirons que le morphisme $(<, f, <')$ est <u>composable avec</u> le morphisme $(\prec, g, \prec')$ si et seulement si $<' = \prec$. Lorsque

$(<,f,<')$ et $(\prec,g,\prec')$ sont composables, leur composé sera défini par

$$(<,f,<') * (\prec,g,\prec') \underset{\text{déf}}{=} (<,f{*}g,\prec'), \tag{5}$$

où $f{*}g=g\circ f$ comme dans la définition 2-3.6. On peut vérifier comme dans la section correspondante du paragraphe 2-3 que ce composé est encore un morphisme de relations transitives.

On définira alors la <u>catégorie des relations transitives</u> comme la classe Trans de tous les morphismes de relations transitives munie de la loi * définie par (5). On peut vérifier comme au paragraphe 2-3 que c'est bien une catégorie. Si l'on appelle <u>morphisme de quasi-ordres</u> un morphisme $(\leqslant, f, \leqslant')$ de relations transitives où $\leqslant$ et $\leqslant'$ sont des quasi-ordres, on voit que la classe **Quasi** de tous les morphismes de quasi-ordres est une sous-catégorie de la catégorie des relations transitives. Nous appellerons cette sous-catégorie **Quasi** la <u>catégorie des quasi-ordres</u>.

Alors l'application δ : Trans $\longrightarrow$ Quasi : $(<,f,<') \rightsquigarrow \delta(<,f,<')$ où $\delta(<,f,<') \underset{\text{déf}}{=} (\leqq, f, \leqq')$, est un foncteur de la catégorie des relations transitives dans la catégorie des quasi-ordres. Il est surjectif parce qu'il est une rétraction du foncteur canonique d'inclusion de Quasi dans Trans. Il est fidèle.

Nous avons omis toutes les démonstrations parce qu'elles se révèlent formellement identiques aux démonstrations des résultats correspondants pour la catégorie des espaces general-topologiques. Il suffirait d'écrire partout $<$, $<'$, et cetera pour $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$, et cetera et de remplacer f continue : $(E, \mathcal{U}) \longrightarrow (E', \mathcal{U}')$ par $f : < \longrightarrow <'$.

Une conséquence du théorème 3 est que l'ensemble des parties finales pour la relation $<$ ne caractérise pas cette relation $<$ elle-même, mais seulement sa fermeture réflexive. En d'autres termes l'ensemble des parties finales caractérise la classe d'équivalence des relations transitives qui ont même fermeture réflexive que $<$. On pourrait alors se tourner vers $\mathcal{S}(<)$ pour caractériser $<$. Mais $\mathcal{S}(<)$ est une famille indexée dans D et c'est à cela qu'elle doit de caractériser $<$. Supposons que l'on se donne arbitrairement une famille indexée, c'est-à-dire encore une application.

$$R : D \longrightarrow \mathcal{P}(D) : x \mapsto R_x,$$

et si celle-ci vérifie la propriété

$$y \in R_x \implies R_y \subseteq R_x \quad , \tag{6}$$

alors la relation $<_R$ définie par

$$x <_R y \underset{\text{déf}}{\iff} y \in R_x \tag{7}$$

est une relation transitive. De plus $S_x(<_R) = \{ y \mid y \in R_x \}$ $= R_x$.

Inversément si l'on se donne arbitrairement une relation transitive $<$, l'application

$$S : D \longrightarrow \mathcal{P}(D) : x \mapsto S_x(<)$$

vérifie (6). De plus la relation $<_S$ est précisément la relation $<$ dont on est parti puisque, par (7), $x <_S y$ $\iff$ $y \in S_x(<)$ et que, par la définition même, $y \in S_x(<)$ $\iff$ $y > x$. Nousavons ainsi mis en correspondance bijective les relations transitives sur D et les parties de $\mathcal{P}(D)$ indexées dans D et vérifiant (6).

Mais nous cherchons une correspondance entre certaines relations et des parties de $\mathcal{P}(D)$ dépourvues de toute structure non canonique, c'est-à-dire autre que celle qui est induite par la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(D)$. Nous allons pour ce faire utiliser l'ensemble des parties finales, quitte, comme on l'a vu, à ne caractériser que des quasi-ordres.

QUASI-ORDONNATEUR SUR UN ENSEMBLE.-

THEOREME 4 : Si $\leqslant$ est un quasi-ordre sur D, on a $x \leqslant y$ si et seulement si :

$$\forall F \in \mathcal{F}(\leqslant),\ x \in F \implies y \in F. \tag{8}$$

Démonstration. Si $x \leqslant y$ et si F est une partie finale, $x \in F$ implique $y \in F$. Inversément si l'on a (8), alors, comme $x \in S_x(\leqslant)$ et comme $S_x(\leqslant)$ est une partie finale, on a $y \in S_x(\leqslant)$ c'est-a-dire $y \geqslant x$. ∎

C'est de ce résultat que nous allons nous inspirer pour définir un quasi-ordre à partir d'une famille de sous-ensembles.

DEFINITION 5 : Soit $\mathcal{Q}$ une partie de $\mathcal{P}(D)$. Nous représenterons par $\leqslant_{\mathcal{Q}}$ la relation sur D pour D définie par

$$x \leqslant_{\mathcal{Q}} y \underset{déf}{\iff} \forall A \in \mathcal{Q},\ x \in A \implies y \in A \tag{9}$$

La relation $\leqslant_{\mathcal{A}}$ est un quasi-ordre puisque $x \in A \Rightarrow x \in A$ et que $(x \in A \Rightarrow y \in A)$ & $(y \in A \Rightarrow z \in A)$ entraine $x \in A \Rightarrow z \in A$.

<u>THEOREME 5</u> : $\mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{A}}) = \text{Un}\,(\text{Inter}\,\mathcal{A})$.

Pour le voir, nous utiliserons deux lemmes .

<u>LEMMES</u> :

1°) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{A}})$.

2°) $S_x(\leqslant_{\mathcal{A}}) = \bigcap \{A \mid A \in \mathcal{A} \;\&\; x \in A\}$. (10)

Démonstration des lemmes:

1°) Supposons $x \in A$, $A \in \mathcal{A}$ et $x \leqslant_{\mathcal{A}} y$. Alors, par la définition même de $\leqslant_{\mathcal{A}}$, on a $y \in A$. A est donc une partie finale.

2°) Si A est une partie finale (et donc a fortiori si $A \in \mathcal{A}$), $x \in A \Rightarrow S_x \subseteq A$. Alors $S_x(\leqslant_{\mathcal{A}}) \subseteq \{A \mid A \in \mathcal{A} \& x \in A\}$. Inversément soit $z \notin S_x$, c'est-à-dire $x \not\leqslant_{\mathcal{A}} z$, soit encore $\exists A_0 \in \mathcal{A} : x \in A_0 \;\&\; z \notin A_0$. Alors, comme $x \in A_0$, $\bigcap \{A \mid A \in \mathcal{A}$ & $x \in A\} \subseteq A_0$ et comme $z \notin A_0$, z n'appartient pas non plus à cette intersection. ▮

Démonstration du théorème. Comme (lemme 1°) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{A}})$, on a (théorème 1), $\text{Un}\,(\text{Inter}\,\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{A}})$.
D'autre part (lemme 2°) $\mathcal{S}(\leqslant_{\mathcal{A}}) \subseteq \text{Inter}\,\mathcal{A}$.
Alors, comme (théorème 3) $\mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{A}}) = \text{Un}\,\mathcal{S}(\leqslant_{\mathcal{A}})$, on a $\mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{A}}) \subseteq \text{Un}\,(\text{Inter}\,\mathcal{A})$. ▮

<u>DEFINITION 6</u> : Nous appellerons <u>quasi-ordonnateur sur</u> un ensemble D un système $\mathfrak{Q}$ de parties de D vérifiant

$$\mathrm{Un}\,(\mathrm{Inter}\,\mathfrak{Q}) \subseteq \mathfrak{Q}\,. \tag{11}$$

<u>THEOREME 6</u> : Les propositions

$$\mathrm{Inter}\,(\mathrm{Un}\,\mathfrak{Q}) \subseteq \mathfrak{Q} \tag{12}$$

et

$$\mathrm{Un}\,\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q} \quad \& \quad \mathrm{Inter}\,\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q} \tag{13}$$

sont équivalentes à (11).

Démonstration. Un $\mathfrak{Q}$ et Inter $\mathfrak{Q}$ sont contenus dans Un (Inter $\mathfrak{Q}$) et aussi dans Inter (Un $\mathfrak{Q}$). Ainsi (11) implique (13) et (12) implique (13). D'autre part (13) implique (11) en effet si $\mathfrak{Q} \supseteq$ Inter $\mathfrak{Q}$, alors Un $\mathfrak{Q} \supseteq$ Un(Inter $\mathfrak{Q}$) et alors si $\mathfrak{Q} \supseteq$ Un $\mathfrak{Q}$ on a $\mathfrak{Q} \supseteq$ Un(Inter $\mathfrak{Q}$). De même (13) implique (12). ▮

Ainsi un quasi-ordonnateur est une famille d'ensembles vérifiant à la fois les axiomes des familles d'ouverts et des familles de fermés en topologie. D'autre part le théorème 1 peut se lire maintenant : $\mathcal{F}(<)$ est un quasi-ordonnateur. Et le théorème 5 donne : $\mathcal{F}(\leqslant_{\mathfrak{Q}})$ est le plus petit quasi-ordonnateur contenant $\mathfrak{Q}$. Il vient ainsi :

<u>THEOREME 7</u> : Soit $\mathfrak{Q}$ une partie de $\mathcal{P}(D)$. $\mathcal{F}(\leqslant_{\mathfrak{Q}}) = \mathfrak{Q}$ si et seulement si $\mathfrak{Q}$ est un quasi-ordonnateur.

On peut construire un quasi-ordre $\leqslant_{\mathcal{F}(<)}$ à partir de l'ensemble des parties finales pour une relation transitive $<$.

THEOREME 8 : Soit $<$ une relation transitive sur D. Le quasi-ordre $\leqslant_{\mathcal{F}(<)}$, est la fermeture réflexive de $<$.

Démonstration. Par le théorème 3, $\mathcal{F}(<) = \mathcal{F}(\leqq)$ et donc $\leqslant_{\mathcal{F}(<)}$ est aussi $\leqslant_{\mathcal{F}(\leqq)}$. Or appliqué au cas particulier de $\leqq$, le théorème 4 se lit : $x \leqq y \iff x \leqslant_{\mathcal{F}(\leqq)} y$. ▮

COROLLAIRE. Soit $<$ une relation transitive sur D. La relation $\leqslant_{\mathcal{F}(<)}$ est la relation $<$ dont on est parti si et seulement si cette dernière est un quasi-ordre.

Soit comme plus haut $\mathcal{Q}$ l'ensemble des quasi-ordres sur D et soit $\mathcal{Q}'$ l'ensemble des quasi-ordonnateurs sur D. Les applications :

$$p : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}' : \leqslant \curvearrowright \mathcal{F}(\leqslant)$$

et $$q : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{Q} : \mathcal{G} \curvearrowright \leqslant_{\mathcal{G}}$$

sont inverses l'une de l'autre en effet (théorème 7) $p \circ q$ est l'identité sur $\mathcal{Q}'$ et (théorème 8) $q \circ p$ est l'identité sur $\mathcal{Q}$. On a ainsi mis en correspondance biunivoque les quasi-ordres et les quasi-ordonnateurs sur un même ensemble D.

QUASI-ORDONNATEUR RARE.-

La convergence dans un espace m-topologique est définie pour les systèmes rares. Nous définirons, à partir de cette convergence, la convergence des fonctions selon un système rare. Or un quasi-ordonnateur comprend toujours l'ensemble vide. Pour l'usage que nous voulons en faire, il nous faut un autre objet.

DEFINITION 7 : Nous appellerons quasi-ordonnateur rare sur un ensemble D un système rare $\mathcal{Q}$ sur D tel que $\mathcal{Q} \cup \{\emptyset\}$ soit un quasi-ordonnateur sur D.

Un quasi-ordonnateur rare n'est jamais à strictement parler un quasi-ordonnateur mais la différence est assez inessentielle et nous nous contenterons de cette locution imparfaite. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(D)$ et soit $\mathcal{A}_0 \underset{\text{déf}}{=} \mathcal{A} \sim \{\emptyset\}$. Alors les quasi-ordres $\leqslant_{\mathcal{A}}$ et $\leqslant_{\mathcal{A}_0}$ sont identiques puisque $\forall x$ et $y \in D$, $x \in \emptyset \Longrightarrow y \in \emptyset$. Ainsi $\mathcal{F}_0(\leqslant)$ et $\mathcal{F}(\leqslant)$ satisfont l'un comme l'autre au théorème 4. Soit $\mathcal{Q}_0$ l'ensemble des quasi-ordonnateurs rares sur D. Les applications :

$$p_0 : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}_0 : \leqslant \;\curvearrowright\; \mathcal{F}_0(\leqslant)$$

et $$q_0 : \mathcal{Q}_0 \longrightarrow \mathcal{Q} : \mathcal{Q} \;\curvearrowright\; \leqslant_{\mathcal{Q}}$$

sont encore inverses l'une de l'autre. On a donc enfin une correspondance biunivoque entre les quasi-ordres et les quasi-ordonnateurs rares sur un même ensemble D.

RELATIONS TRANSITIVES NON BLOQUEES.-

DEFINITION 8 : Une relation binaire R sur D est dite bloquée si et seulement si il existe un élément x de D tel que $\forall y \in D$, $(x, y) \notin R$.

Cette définition est due à Day (DAY [2]). Une relation réflexive n'est jamais bloquée. Soit $<$ une relation transitive sur D. La section $\mathcal{S}_x(<)$ est vide si et seulement si x n'a aucun successeur. D'où le théorème :

<u>THEOREME 9</u> : Soit $<$ une relation transitive sur D. $\mathcal{S}(<)$ est un système rare sur D si et seulement si la relation $<$ n'est pas bloquée.

<u>THEOREME IO</u> : Soit $<$ une relation transitive sur D. $\mathcal{S}(<)$ et $\tilde{\mathcal{F}}_0(<)$ ont même fermeture antihéréditaire si et seulement si la relation $<$ n'est pas bloquée.

Démonstration. Si $F\mathcal{S}(<) = F\tilde{\mathcal{F}}_0(<)$, $\emptyset \notin \mathcal{S}(<)$ puisque $\emptyset \notin \tilde{\mathcal{F}}_0(<)$. (théorème 2.N.6.1°) et la relation $<$ est non bloquée. D'autre part on a toujours $\tilde{\mathcal{F}}_0(<) \subseteq F\mathcal{S}(<)$ puisqu'une partie finale non vide contient toujours au moins une section, à savoir la section d'un quelconque de ses points ((2)).
Et par les théorèmes 2 et 9 on a $\mathcal{S}(<) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_0(<)$ si et seulement si $<$ est une relation transitive non bloquée. ∎

<u>COFINALITE.-</u>

Soit D un ensemble muni d'une relation transitive.

<u>DEFINITION 9</u> : une partie C de D est dite <u>cofinale</u> si et seulement si

$$\forall x \in D, \exists y \in C : \quad y > x \,. \tag{14}$$

THEOREME 11 : L'ensemble des parties cofinales pour la relation $<$ est $G\mathcal{S}(<)$.

Démonstration. $y > x \iff y \in S_x(<)$. Alors (14) peut s'écrire : $\forall x \in D, \exists y \in C : y \in S_x(<)$, c'est-à-dire $\forall x \in D, C \cap S_x(<) \neq \emptyset$. ∎

THEOREME 12 : L'ensemble D tout entier est cofinal si et seulement si la relation $<$ est non bloquée. Il existe unepartie cofinale au moins si et seulement si la relation $<$ est non bloquée.

Démonstration. Par le théorème 2-N.6.1°, les propositions $D \in G\mathcal{S}(<)$ et $G\mathcal{S}(<) \neq \emptyset$ sont l'une et l'autre équivalentes à $\emptyset \notin \mathcal{S}(<)$. ∎

THEOREME 13 : L'ensemble des parties cofinales pour la relation $<$ est $F\,\mathcal{F}_c(<)$ si et seulement si $<$ est non bloquée.

Démonstration. $G\mathcal{S}(<) = G\,\mathcal{F}_c(<)$ équivaut (théorème 2-N.5) à $F\mathcal{S}(<) = F\,\mathcal{F}_c(<)$ et cette dernière égalité a lieu si et seulement si $<$ est non bloquée (théorème 10). ∎

COMPARAISON DES QUASI-ORDONNATEURS.-

Soit D un ensemble. On dit d'une relation binaire R sur D qu'elle est plus fine que la relation S si et seulement si

$$\forall x \text{ et } y \in D,\ (x, y) \in R \implies (x, y) \in S.$$

DEFINITION 10 : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux quasi-ordonnateurs sur D, nous dirons que $\mathcal{P}$ est plus fin que $\mathcal{Q}$ si et seulement si $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{Q}$.

THEOREME 14 : Soient $\leqslant$ et $\leqslant'$ deux quasi-ordres sur D. $\leqslant$ est plus fin que $\leqslant'$ si et seulement si $\mathcal{F}(\leqslant)$ est plus fin que $\mathcal{F}(\leqslant')$.

LEMMES :

1°) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des parties de $\mathcal{P}(D)$. Si $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$, alors le quasi-ordre $\leqslant_{\mathcal{A}}$ est plus fin que $\leqslant_{\mathcal{B}}$.

2°) Soient $<$ et $<'$ deux relations transitives sur D. Si la relation $<$ est plus fine que $<'$, alors le quasi-ordonnateur $\mathcal{F}(<)$ est plus fin que $\mathcal{F}(<')$.

Démonstration des lemmes :

1°) Si $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$, alors $\forall A \in \mathcal{A}$, $x \in A \Longrightarrow y \in A$ implique $\forall B \in \mathcal{B}$, $x \in B \Longrightarrow y \in B$.

2°) Si $<$ est plus fine que $<'$, $S_x(<) \subseteq S_x(<')$ et donc, par (2), $F \in \mathcal{F}(<') \Longrightarrow F \in \mathcal{F}(<)$.∎ Le théorème 14 en découle immédiatement.

QUASI-ORDONNATEURS ANTISYMETRIQUES.-

On dit d'une relation binaire R sur D qu'elle est antisymétrique si et seulement si

$$\forall x \text{ et } y \in D, \ [(x,y) \in R \ \& \ (y,x) \in R] \Longrightarrow x = y .$$

DEFINITION 11 : Si $\mathcal{Q}$ est une partie de $\mathcal{P}(D)$ nous dirons que $\mathcal{Q}$ est antisymétrique si et seulement si, étant donnés deux points distincts quelconques de D, il existe un élément de $\mathcal{Q}$ qui comprenne l'un et pas l'autre.

THEOREME 15 : Le quasi-ordre $\leqslant_{\mathcal{Q}}$ est antisymétrique si et seulement si $\mathcal{Q}$ est antisymétrique.

Démonstration. $(x \leqslant_{\mathcal{Q}} y \,\&\, y \leqslant_{\mathcal{Q}} x) \Rightarrow x = y$ équivaut à $\forall A \in \mathcal{Q}, (x \in A \Leftrightarrow y \in A) \Rightarrow x = y$, c'est-à-dire $x \neq y \Rightarrow [(\exists A \in \mathcal{Q} : x \in A \,\&\, y \notin A)$ ou $(\exists A \in \mathcal{Q} : y \in A \,\&\, x \notin A)]$. Comme une relation est antisymétrique en même temps que sa fermeture réflexive, on a, par le théroème 8, le corollaire suivant :

COROLLAIRE : Une relation transitive $<$ est antisymétrique si et seulement si le quasi-ordonnateur $\mathcal{F}(<)$ est antisymétrique.

Le résultat énoncé dans l'exercice 2 du paragraphe 1 de BOURBAKI [1] est précisément équivalent à ceci : Si $\mathcal{Q}$ est un quasi-ordonnateur antisymétrique, alors $\leqslant_{\mathcal{Q}}$ est une relation d'ordre (transitive, réflexive et antisymétrique) et $\mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{Q}$. Plus précisément $\mathcal{Q}$ est considéré comme la famille des ouverts pour une topologie sur D. $y \leqslant_{\mathcal{Q}} x$ est défini par $y \in \overline{\{x\}}$ ce qui est bien équivalent à 9 puisque $y \in \overline{\{x\}} \Longleftrightarrow \complement\{x\} \in G\mathcal{V}(y)$ (théorème 2-1.2.2°) et que les ouverts entourant y forment une base pour $\mathcal{V}(y)$. On a ainsi $\forall Q \in \mathcal{Q}, y \in Q \Rightarrow Q \cap \{x\} \neq \emptyset$. Alors Bourbaki définit $\mathcal{V}_{\mathcal{Q}}(x)$ comme $F\{S_x(\leqslant_{\mathcal{Q}})\}$ et affirme que cette fonction de voisinage est celle de la topologie intialement donnée. Or les ouverts correspondent à $\mathcal{V}_{\mathcal{Q}}$ sont exactement les parties finales pour $\leqslant_{\mathcal{Q}}$ et l'affirmation finale est donc bien $\mathcal{F}(\leqslant_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{Q}$.

§ 4. DOMAINES REPRESENTATIFS DE LA CONVERGENCE DES FONCTIONS.-

Soient D un ensemble, E, un espace m-topologique, f une application : $D \longrightarrow E$, $\mathfrak{A}$ un système rare sur D et x un point de E.

DEFINITION 1 : Nous dirons que f converge vers x selon $\mathfrak{A}$ ou encore que x est point limite de f selon $\mathfrak{A}$ si et seulement si le système rare $f\mathfrak{A}$ sur E converge vers x.

On va voir que si l'on associe à tout couple $(f,\mathfrak{A})$ de ce genre un ensemble de points considérés comme points limite de manière à satisfaire à une condition apparentée à la proposition 2-2(3) on détermine une structure d'espace m-topologique pour l'ensemble E. Mais il n'est en aucune façon nécessaire pour déterminer une telle structure de considérer tous les couples du type $(f,\mathfrak{A})$ pour tous les ensembles D. Nous allons le montrer par un exemple simple (et d'ailleurs, en un sens, trivial).

Soit $\tilde{\mathcal{A}}_E$ l'ensemble des couples $(1,\mathfrak{A})$ où 1 est l'application identique sur E et $\mathfrak{A}$ un système rare sur E. Notons $\widetilde{\text{sub}}$ la relation définie par

$$(1,\mathfrak{A}') \ \widetilde{\text{sub}} \ (1,\mathfrak{A}) \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{A}' \text{ sub } \mathfrak{A}.$$

Soit $\tilde{L}$ une application : $\tilde{\mathcal{A}}_E \longrightarrow \mathcal{P}(E) : (1,\mathfrak{A}) \curvearrowright \tilde{L}(1,\mathfrak{A})$ vérifiant la proposition suivante : $\forall x \in E, \forall (1,\mathfrak{A}) \in \tilde{\mathcal{A}}_E$,

$x \in \tilde{L}(1,\mathcal{Q}) \Leftrightarrow \forall (1,\mathcal{Q}') \ \widetilde{\text{sub}}\ (1,\mathcal{Q}), \exists (1,\mathcal{Q}'') \in \tilde{\mathcal{A}}_E$:
$x \in \tilde{L}(1,\mathcal{Q}'')$ & $1\mathcal{Q}''$ dans $\mathbf{U} 1\mathcal{Q}'$.

Tout ceci n'est qu'un déguisement transparent pour la convergence des systèmes rares dans un espace **m-topologique.** Si on appelle ψ l'application : $\mathcal{A}_E \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_E : \mathcal{Q} \curvearrowright (1,\mathcal{Q})$, alors l'application **L** $\underset{\text{déf}}{=}$ $L \circ \psi$ vérifie la proposition 2-2(3) et est donc (théorème 2-2.9) la convergence d'un certain espace m-topologique dont E est l'ensemble **sous-jacent.** De plus 1 converge vers x selon $\mathcal{Q}$ (au sens de la définition 1) si et seulement si $x \in \tilde{L}(1,\mathcal{Q})$.

Nous allons étudier des déguisements de ce genre en général en remarquant que les résultats obtenus dans l'exemple sont basés sur le fait que, par ψ , on peut associer à tout système rare $\mathcal{Q}$ un couple $(f,\mathcal{B})$ — en l'occurence : $(1,\mathcal{Q})$ — tel que $Ff\mathcal{B} = F\mathcal{Q}$ et $\mathbf{U} f\mathcal{B} = \mathbf{U}\mathcal{Q}$.

Soit E un ensemble.

<u>DEFINITION 2</u> : Nous appellerons <u>Φ-système sur</u> E un couple de la forme $(f,\mathcal{Q})$ où f est une application définie sur un ensemble quelconque et à valeurs dans E et où $\mathcal{Q}$ est un système rare sur le domaine de f.

Nous appellerons Φ_E la classe de tous les Φ-systèmes sur E, en omettant d'ailleurs souvent l'indice E. Soient

φ l'application : $\Phi \longrightarrow \mathcal{A} : (f,\mathcal{Q}) \curvearrowright f\mathcal{Q}$ (1)

et ψ_1 l'application : $\mathcal{A} \longrightarrow \Phi : \mathcal{Q} \curvearrowright (1,\mathcal{Q})$. (2)

L'application φ est surjective parce que c'est une rétraction de ψ_1 . De même ψ_1 est injective.

<u>DEFINITION 3</u> : Nous appellerons <u>domaine représentatif de la convergence des fonctions (relativement à</u> l'ensemble E) une partie Ψ de Φ pour laquelle on dispose d'une application $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \Psi$ telle que $\forall \mathcal{O} \in \mathcal{A}$,

$$F\varphi(\psi(\mathcal{O})) = F\mathcal{O} \tag{3}$$

et $$\cup\, \varphi(\psi(\mathcal{O})) = \cup\, \mathcal{O}. \tag{4}$$

On dira d'une telle application ψ qu'elle <u>représente</u> $\mathcal{A}$ dans Ψ . L'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}_E$ est, par exemple, un domaine représentatif. Un élément de Ψ sera dit <u>Ψ-système sur E</u>.

<u>DEFINITION 4</u>,: Nous dirons que le Φ-système $(f',\mathcal{O}')$ est un sous-système du Φ-système $(f,\mathcal{O})$ si et seulement si $\varphi(f',\mathcal{O}')$ est un sous-sytème de $\varphi(f,\mathcal{O})$, c'est-à-dire si l'on a $f'\mathcal{O}'$ sub $f\mathcal{O}$.

On écrira encore $(f',\mathcal{O}')$ sub $(f,\mathcal{O})$. De même on écrira $\cup(f,\mathcal{O})$ pour $\cup f\mathcal{O}$. Si Ψ est un domaine représentatif et si ψ représente $\mathcal{A}$ dans Ψ , alors on a $\mathcal{O}'$ sub $\mathcal{O}$ si et seulement si $\psi(\mathcal{O}')$ sub $\psi(\mathcal{O})$ en effet $\varphi(\psi(\mathcal{O}'))$ et $\varphi(\psi(\mathcal{O}))$ ont même fermeture antihéréditaire que $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}$ respectivement ((3)).

LA CONVERGENCE DES FONCTIONS SUR UN DOMAINE REPRESENTATIF.-

Soit E un espace m-topologique. Soit Ψ un domaine représentatif. Notons encore φ la restriction de φ à Ψ.

DEFINITION 5 : L'application $\tilde{L} : \Psi \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, égale par définition à $L \circ \varphi$, sera dite Ψ- convergence des fonctions dans l'espace E.

$x \in \tilde{L}\,(f, \mathcal{Q})$ peut se lire, en vertu de la définition 1 : f converge vers x selon $\mathcal{Q}$, mais nous dirons aussi que le Ψ-système $(f, \mathcal{Q})$ converge vers x. $\tilde{L}\,(f, \mathcal{Q})$ est ainsi l'ensemble des points limite du Ψ-système $(f, \mathcal{Q})$.

THEOREME 1 : Tout sous-système dans Ψ d'un Ψ-système convergeant vers un point converge également vers ce point.

Soit à démontrer : $\forall x \in E, \forall \alpha \in \Psi$,

$$x \in \tilde{L}\alpha \implies \forall \alpha' \in \Psi \text{ et sub } \alpha,\ x \in \tilde{L}\alpha'. \qquad (5)$$

Démonstration. $x \in \tilde{L}\alpha$ équivaut à $x \in L\,\varphi(\alpha)$. Dans ce cas $\forall \mathcal{Q}'$sub $\varphi(\alpha)$, $x \in L\mathcal{Q}'$. Par conséquent $\forall \alpha'$sub α, $x \in L\varphi(\alpha')$, c'est-à-dire $x \in \tilde{L}\alpha'$. ▮

THEOREME 2 : La Ψ-convergence des fonctions vérifie la proposition suivante : $\forall x \in E, \forall \alpha \in \Psi$,

$$x \in \tilde{L}\alpha \iff \forall \alpha' \in \Psi \text{ et sub } \alpha, \exists \alpha'' \in \Psi \text{ et dans } \bigcup \alpha' : x \in \tilde{L}\alpha''. \qquad (6)$$

Démonstration. L'implication directe découle immédiatement de (5) en faisant $\alpha'' = \alpha'$. Pour l'implication opposée nous utiliserons 2-2(3). Supposons $\forall \alpha' \text{ sub } \alpha, \exists \alpha''$ dans $\mathcal{U}\alpha'$: $x \in \tilde{L}\alpha''$.
Soit ψ une application représentant $\mathcal{A}$ dans Φ et soit $\mathcal{Q}'$ sub $\varphi(\alpha)$. On a $\psi(\mathcal{Q}')$ sub α et donc $\exists \alpha''$ dans $\mathcal{U}\mathcal{Q}$: $x \in \tilde{L}\alpha''$.
Faisons $\mathcal{Q}'' = \varphi(\alpha'')$. On trouve $\forall \mathcal{Q}' \text{ sub } \varphi(\alpha), \exists \mathcal{Q}''$ dans $\mathcal{U}\mathcal{Q}'$: $x \in L\mathcal{Q}''$ et donc $x \in L\varphi(\alpha)$, c'est-à-dire $x \in \tilde{L}\alpha$. ▮

LA CONVERGENCE DES FONCTIONS SUR UN DOMAINE REPRESENTATIF COMME CONCEPT INITIAL DE LA STRUCTURE D'ESPACE m-TOPOLOGIQUE.-

Soient E un ensemble et Φ un domaine représentatif.
Soit $\tilde{L}$ une application : $\Phi \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

LEMMES pour le théorème 3.

1°) Si $\tilde{L}$ vérifie (6), alors $\tilde{L}$ vérifie (5).

2°) Si $\tilde{L}$ vérifie (5), alors $\tilde{L}$ se factorise selon φ en une application $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ (telle que $\tilde{L} = L \circ \varphi$) vérifiant 2-2(2).

3°) La solution au problème posé en 2° est unique. Elle est nécessairement de la forme $\tilde{L} \circ \psi$ ou ψ est une application qui représente $\mathcal{A}$ dans Φ.

Démonstration :

1°) Supposons $x \in \tilde{L}\alpha$ et α' sub α. Alors si β' sub α' on a aussi β' sub α et donc, si $\tilde{L}$ vérifie (6), on a $\forall \beta' \text{ sub } \alpha'$, $\exists \alpha''$ dans $\mathcal{U}\beta'$: $x \in \tilde{L}\beta''$, c'est-à-dire, par (6) encore, $x \in \tilde{L}\alpha'$.

2°) Il existe par hypothèse une application ψ qui représente $\mathcal{A}$ dans Ψ . Nous allons montrer que $\tilde{L} = (\tilde{L} \circ \psi) \circ \varphi$. Soit $\alpha \in \Psi$. $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\psi(\varphi(\alpha)))$ ont même fermeture antihéréditaire. On a donc α sub $\psi(\varphi(\alpha))$ et inversément. D'où, si l'on suppose (5), $\tilde{L}\alpha = \tilde{L}\psi(\varphi(\alpha))$. D'autre part $\tilde{L} \circ \psi$ vérifie 2-2(2) en effet supposons $x \in \tilde{L} \circ \psi\, \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$sub $\mathcal{Q}$; on a alors $\psi(\mathcal{Q}')$ sub $\psi(\mathcal{Q})$ et donc, par (5), $x \in \tilde{L} \circ \psi\, \mathcal{Q}'$. $\tilde{L} \circ \psi$ est donc une solution.

3°) Supposons que $\tilde{L} = L \circ \varphi$, L vérifiant 2-2(2). Comme $\mathcal{Q}$ et $\varphi(\psi(\mathcal{Q}))$ ont même fermeture antihéréditaire on a $\mathcal{Q}$ sub $\varphi(\psi(\mathcal{Q}))$ et réciproquement et donc, par 2-2(2), L $\mathcal{Q}$ = L $\varphi(\psi(\mathcal{Q}))$. Or si ψ représente $\mathcal{A}$ dans Ψ on a $\tilde{L}\psi\mathcal{Q} = (L \circ \varphi)\psi(\mathcal{Q})$. On a donc $L = \tilde{L} \circ \psi$. ▌

<u>THEOREME 3</u> : Une application $\tilde{L} : \Psi \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est la Ψ-convergence des fonctions dans un espace **m-topologique** sur l'ensemble E si et seulement si elle vérifie (6). De plus cet espace est alors unique.

Démonstration. On a vu (théorème 2) que la convergence des fonctions dans un espace m-topologique vérifie (6). Inversément, supposons que $\tilde{L}$ est une application arbitraire vérifiant (6). Alors (lemme 1°) $\tilde{L}$ vérifie (5) et est donc un produit $L \circ \varphi$ où L vérifie 2-2(2) (lemme 2°). Comme on sait par ailleurs que cette application L est unique (lemme 3°) il suffit de montrer que L vérifie 2-2(3) En effet (théorème 2-2.9) L est **alors** la convergence d'un et d'un seul espace dont $\tilde{L}$ est la Ψ-convergence puisque $\tilde{L} = L \circ \varphi$. Soit $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}$ et supposons $x \in L\mathcal{Q}$. Alors, par 2-2(2) en prenant $\mathcal{Q}'$ pour $\mathcal{Q}''$, on a $\forall \mathcal{Q}'$sub $\mathcal{Q}$, $\exists \mathcal{Q}''$ dans $\mathbf{U}\mathcal{Q}'$: $x \in L\mathcal{Q}''$. Inversément si $\forall \mathcal{Q}'$ sub $\mathcal{Q}$, $\exists \mathcal{Q}''$ dans $\mathbf{U}\mathcal{Q}'$: $x \in L\mathcal{Q}''$, alors, soit α' sub $\psi(\mathcal{Q})$ — ψ représentant $\mathcal{A}$ dans Ψ —, on a $\varphi(\alpha')$ sub $\mathcal{Q}$ et donc $\exists \mathcal{Q}''$ dans $\mathbf{U}\varphi(\alpha')$: $x \in L\mathcal{Q}''$. Si l'on prend $\psi(\mathcal{Q}'')$ pour α'', il vient $\forall \alpha'$ sub $\psi\mathcal{Q}$, $\exists \alpha''$ dans $\mathbf{U}\alpha'$: $x \in \tilde{L}\alpha''$ — on sait en effet (lemme 3°) que $L = \tilde{L} \circ \psi$ — c'est-à-dire, par (6), $x \in \tilde{L}\psi(\mathcal{Q})$, soit encore $x \in L\mathcal{Q}$. ▌

RELATIONS ENTRE LA CONVERGENCE DES FONCTIONS ET LES AUTRES NOTIONS DE LA STRUCTURE D'ESPACE m-TOPOLOGIQUE.-

Soit E un espace m-topologique. Soient Ψ un domaine représentatif et $\tilde{L}$ la Ψ-convergence de l'espace E. Convenons une fois pour toute que x représente un point de E, X une partie de E, $\mathcal{Q}$ un système rare sur E et α un Ψ-système sur E. On dira que α est <u>dans</u> X si et seulement si $\mathbf{U}\alpha \subseteq X$.

<u>THEOREME 4</u> :

$$x \in \tilde{L}\alpha \Leftrightarrow \forall X,\ X \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow X \in F\varphi(\alpha). \qquad (7)$$

$$X \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \forall \alpha,\ x \in \tilde{L}\alpha \Rightarrow X \in F\varphi(\alpha). \qquad (8)$$

$$x \in \tilde{L}\alpha \Leftrightarrow \forall X,\ x \in iX \Rightarrow X \in F\varphi(\alpha). \qquad (9)$$

$$x \in iX \Leftrightarrow \forall \alpha,\ x \in \tilde{L}\alpha \Rightarrow X \in F\varphi(\alpha). \qquad (10)$$

$$x \in \tilde{L}\alpha \Leftrightarrow \forall X,\ X \in G\varphi(\alpha) \Rightarrow x \in aX. \qquad (11)$$

$$x \in aX \Leftrightarrow \exists \alpha : X \in G\varphi(\alpha)\ \&\ x \in \tilde{L}\alpha. \qquad (12)$$

$$x \in aX \Leftrightarrow \exists \alpha \text{ dans } X : x \in \tilde{L}\alpha. \qquad (13)$$

Démonstration. Les second membres (7), (9) et (11) sont équivalents à $x \in L\varphi(\alpha)$, (théorème 2-2.10), c'est-à-dire, par définition, à $x \in \tilde{L}\alpha$. Si $X \in \mathcal{V}(x)$ on a $\forall \mathcal{a}$, $x \in L\mathcal{a} \Rightarrow X \in F\mathcal{a}$ (2-2(13). Alors $\forall \alpha$, $x \in \tilde{L}\alpha \Rightarrow x \in L\varphi(\alpha)$ et donc $X \in F\varphi(\alpha)$. Inversément, supposons $\forall \alpha$, $x \in \tilde{L}\alpha \Longrightarrow X \in F\varphi(\alpha)$ et supposons que ψ représente $\mathcal{A}$ dans Ψ. $x \in L\mathcal{a} \Rightarrow x \in \tilde{L}\psi(\mathcal{a})$ et donc $X \in F\varphi(\psi(\mathcal{a}))$, c'est-à-dire $X \in F\mathcal{a}$. On a ainsi $\forall \mathcal{a} \in \mathcal{A}$, $x \in L\mathcal{a} \Rightarrow X \in F\mathcal{a}$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{V}(x)$ par 2-2(13) encore. Ceci démontre (8). (10)se démontre à partir de (8) par 1-1(1) et de même le second membre de (12) est la négation de l'expression par (10) de $x \in i \sim X$, ce qui, par 1-1(4), démontre (12). On démontre (13) à partir de 2-2(18).

Supposons $x \in aX$. Alors on a $\exists \mathcal{a}$ dans X : $x \in L\mathcal{a}$,et par conséquent $\exists \alpha$ dans X : $x \in \tilde{L}\alpha$, par exemple en faisant $\alpha = \psi(\mathcal{a})$. Inversément si l'on suppose $\exists \alpha$ dans X : $x \in \tilde{L}\alpha$, alors si $\mathcal{a} = \varphi(\alpha)$ on a $\mathcal{a}$ dans X & $x \in L\mathcal{a}$, c'est-à-dire $x \in aX$. ▮

On démontre de même, à partir du théoèrme 2-3.3 et en utilisant φ et ψ, le théorème suivant :

THEOREME 5.

1°) Une partie de F de E est fermée si et seulement si

$$\forall \alpha \in \Psi, \ F \in \mathcal{G}\varphi(\alpha) \Rightarrow \tilde{L}\alpha \in F.$$

2°) Une partie F de E est fermée si et seulement si tout Ψ-système dans F a ses points limite dans F.

Soient E et E' deux espaces m-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$. Soit Ψ un domaine représentatif relativement à E. Soit Ψ' un domaine représentatif relativement à E' et tel que $(g,\mathcal{B})\in\Psi$ entraîne $(f\circ g,\mathcal{B})\in\Psi'$. Soient $\tilde{L}$ et $\tilde{L}'$ la Ψ-convergence et la Ψ'-convergence respectivement.

<u>THEOREME 6</u> : L'application f est continue si et seulement si

$$\forall (g,\mathcal{B})\in\Psi\ ,\ f\tilde{L}(g,\mathcal{B})\subseteq\tilde{L}'(f\circ g,\mathcal{B}). \qquad (14)$$

Démonstration. Supposons f continue. Alors soit $(g,\mathcal{B})\in\Psi$, on a $fLg\mathcal{B}\subseteq L'fg\mathcal{B}$. Inversément, si on suppose (14), soient $\mathcal{Q}\in\mathcal{A}$ et $(f',\mathcal{Q}')=\psi(\mathcal{Q})$. On a $f\tilde{L}(f',\mathcal{Q}')\subseteq\tilde{L}'(f\circ f',\mathcal{Q}')$ c'est-à-dire $fLf'\mathcal{Q}\subseteq L\,ff'\mathcal{Q}'$. Mais, par (3), $F\mathcal{Q}=Ff'\mathcal{Q}'$ et donc $Ff\mathcal{Q}=Fff'\mathcal{Q}'$, d'où $fL\mathcal{Q}\subseteq L'f\mathcal{Q}$ et la continuité de f.∎ On démontre de même à partir du théorème 2-3-6 :

<u>THEOREME 7</u> : L'application f est fermée si et seulement si

$$\forall (g,\mathcal{B})\in\Psi\ ,\ \tilde{L}'(f\circ g,\mathcal{B})\subseteq f\tilde{L}(g,\mathcal{B}). \qquad (15)$$

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux m-topologies pour l'ensemble E. Soient Ψ un domaine représentatif, $\tilde{L}$ la Ψ-convergence de l'espace $(E,\mathcal{V})$ et $\tilde{L}'$ la Ψ-convergence de l'espace $(E\ ,\mathcal{V}')$. Si l'on exprime par le théorème 6 que l'identité est continue : $(E,\mathcal{V})\longrightarrow(E,\mathcal{V}')$ il vient :

<u>THEOREME 8</u> : $\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{V}'$ si et seulement si

$$\forall (f, \mathfrak{A}) \in \Psi \, , \; \tilde{L}(f, \mathfrak{A}) \subseteq \tilde{L}'(f, \mathfrak{A}). \qquad (16)$$

Soient $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces m-topologiques.
Appelons E le produit cartésien des E_i et p_k la projection canonique : $E \longrightarrow E_k$: $x \mapsto x_k$. Soit Ψ un domaine représentatif relativement à E. Donnons-nous encore, pour chaque $k \in I$, un domaine représentatif Ψ_k relativement à E_k et tel que si $(f, \mathfrak{A}) \in \Psi$, $(p_k \circ f, \mathfrak{A}) \in \Psi_k$
Le théorème 2-3.22.2° donne alors :

<u>THEOREME 9</u> : Un point de x de E est un point limite du Ψ-système $(f, \mathfrak{A})$ dans l'espace produit si et seulement si chaque projection x_k de x est point limite du Ψ_k-systène $(p_k \circ f \;\; \mathfrak{A})$ correspondant.

Soient $(E, \mathcal{V})$ un espace m-topologique, E' un ensemble et f une application surjective : $E \longrightarrow E'$, anticompatible avec la m-topologie $\mathcal{V}$. Soit Ψ un domaine représentatif relativement à E. Soit Ψ' un domaine représentatif relativement à E', tel que si $(g, \mathfrak{A}) \in \Psi$, $(f \circ g, \mathfrak{A}) \in \Psi'$. Notons $\tilde{L}$ et $\tilde{L}_f$ la Ψ-convergence de l'espace $(E, \mathcal{V})$ et la Ψ'-convergence de l'espace quotient $(E', \mathcal{V}_f)$ respectivement.

Le théorème 2-3.26.2° donne alors :

THEOREME 10 :

$$\forall (g, \mathcal{a}) \in \Psi, \ \tilde{L}_f(f\cdot g, \mathcal{a}) = \tilde{L}(g, \mathcal{a})$$

On pourrait d'ailleurs tout aussi bien donner pour ce théorème une démonstration directe à partir de (14) et de (15).

CONVERGENCE DES FONCTIONS SELON UN SYSTEME RARE.-

La classe $\breve{\Phi}$ elle-même est un domaine représentatif pour la convergence des fonctions, en effet l'application ψ_1, définie en (2) est une section de φ, c'est-à-dire que $\varphi \circ \psi_1$, est l'identité sur $\mathcal{A}$. ψ_1, satisfait donc évidement à (3) et (4).

Soit E un espace m-topologique.

DEFINITION 6 : La $\breve{\Phi}$-convergence des fonctions de l'espace E sera dite convergence des fonctions selon un système rare de l'espace E.

Tous les théorèmes établis par la Ψ-convergence sont valables dans ce cas particulier où $\Psi = \breve{\Phi}$. En particulier la convergence des fonctions selon un système rare caractérise la structure de l'espace E. Etant donné ses relations étroites avec la convergence des systèmes rares, nous la noterons simplement L dans la suite, et ce dans n'importe quel espace m-topologique, sauf mention explicite du contraire.

CONVERGENCE DES FONCTIONS SELON UN QUASI-ORDONNATEUR RARE.-

Soit E un ensemble. La classe $\mathfrak{X}$ de tous les Φ-systèmes $(f,\mathfrak{F})$, où $\mathfrak{F}$ est quasi-ordonnateur rare sur le domaine de f est un domaine représentatif de la convergence des fonctions. Soit $\mathcal{Q}$ un système rare sur E. Considérons l'ensemble $D \underset{déf}{=} \{(x,A) \mid A \in \mathcal{Q} \,\&\, x \in A\}$ avec le quasi-ordre $\leqslant$ défini par

$$(x,A) \leqslant (y,B) \underset{déf}{\iff} B \subseteq A.$$

Soif f l'application : $D \longrightarrow E : (x,A) \curvearrowright x$. Il est clair que $f\,S_{(x,A)}(\leqslant) = A$ et donc que $f\mathcal{S}(\leqslant) = \mathcal{Q}$.
De $F\,\mathcal{F}_o(\leqslant) = F\mathcal{S}(\leqslant)$ (théorème 2-N'.10) on tire, par 2-N(24), $Ff\mathcal{F}_o(\leqslant) = Ff\mathcal{S}(\leqslant)$. D'autre part $\bigcup f\mathcal{F}_o(\leqslant)$ et $\bigcup \mathcal{Q}$ sont l'un et l'autre égaux à Imf.
On a donc

$$F f\mathcal{F}_o(\leqslant) = F\mathcal{Q} \quad \text{et} \quad \bigcup f\mathcal{F}_o(\leqslant) = \bigcup\mathcal{Q}. \qquad (17)$$

Appelons $\psi_2(\mathcal{Q})$ le couple $(f, \mathcal{F}_o(\leqslant))$ que nous venons de construire et soit ψ_2 l'application : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{X} : \mathcal{Q} \curvearrowright \psi_2(\mathcal{Q})$.

(18)

Les égalités (17) nous assurent que ψ_2 satisfait à (3) et à (4) et $\mathfrak{X}$ est donc bien un domaine représentatif.

Soit maintenant E un espace m-topologique.

<u>DEFINITION 7</u> : La $\mathcal{X}$-convergence des fonctions de l'espace E sera dite <u>convergence des fonctions selon un quasi-ordonnateur rare de</u> l'espace E.

C'est une restriction de la convergence des fonctions selon un système rare mais elle suffit à caractériser la structure de l'espace. Nous la noterons encore L.

CONVERGENCE DES FONCTIONS ORIENTEES.-

Soit E un espace m-topologique. Soit f une application d'un ensemble quelconque D vers l'ensemble E et soit $<$ une relation transitive non bloquée sur D.

<u>DEFINITION 8</u> : Nous dirons que f <u>converge vers</u> x <u>selon</u> $<$ ou encore que x est <u>point limitede</u> f <u>selon</u> $<$ si et seulement si f converge vers x selon $\mathcal{F}_c(<)$.

Il s'agit donc essentiellement de la convergence des fonctions selon un quasi-ordonnateur rare. Nous avons étendu cette convergence à toutes les relations transitives non bloquées mais cette extension est inessentielle puisque $\mathcal{F}_c(<) = \mathcal{F}_c(\leq)$ Cette notion de convergence caractérise encore la structure de l'espace.

Ribeiro [I] appelle système orienté un ensemble non vide muni d'une relation transitive non bloquée. Nous allons omettre l'exclusion du vide dans la définition suivante :

DEFINITION 9 : Nous appellerons fonction orientée à valeur dans E une fonction à valeurs dans E dont le domaine est muni d'une relation transitive non-bloquée.

A strictement parler, l'expression "fonction orientée" devait représenter un couple $(f, <)$ mais le plus souvent nous écrirons simplement "f est une fonction orientée", sous-entendant la mention d'une relation $<$.

DEFINITION 10 :

1°) Nous dirons que la fonction orientée f est finalement dans l'ensemble X si et seulement si

$$\exists d_0 \in \mathrm{Dom}\, f : \forall d > d_0 \,,\ f(d) \in X. \tag{19}$$

2°) Nous dirons que la fonction orientée f est fréquemment dans X si et seulement si

$$\forall d \in \mathrm{Dom}\, f,\ \exists d' > d : f(d') \in X. \tag{20}$$

Ce sont les généralisations mot pour mot de deux notions introduites par Kelley.

Remarques.

1°) La proposition (19) peut se lire $\exists y_0 : f S_{y_0}(<) \subseteq X$, c'est-à-dire $X \in \mathrm{Ff}\, \mathcal{S}(<)$ ou encore $X \in \mathrm{Ff}\, \mathcal{F}_0(<)$.

2°) La négation de (19) est la proposition (20) écrite pour $\sim X$. Ainsi par le théorème 2-N.1, (20) équivaut à $X \in Gf\,\mathcal{F}_c\,(<)$. Alors par 2-N (26) et le théorème 2 -N'.13, (20) équivaut à $f^{-1}X$ est cofinal dans (domf,<).

Comme un quasi-ordonnateur recouvre l'ensemble sur lequel il est donné, on a $\bigcup f\,\mathcal{F}_c\,(<) = \mathrm{Im} f$.
Ceci, joint aux deux remarques concernant la définition 10, permet de réécrire le théorème 4 sous la forme suivante :

THEOREME 11.

1°) Une fonction orientée converge vers x si et seulement si elle est finalement dans tout voisinage de x.

2°) V est un voisinage de x si et seulement si toute fonction orientée convergeant vers x est finalement dans V.

3°) Une fonction orientée converge vers x si et seulement si elle est finalement dans tout ensemble auquel x est intérieur.

4°) Un point x est intérieur à l'ensemble X si et seulement si toute fonction orientée convergeant vers x est finalement dans cet ensemble X.

5°) Une fonction orientée converge vers un point x si et seulement si celui-ci adhère à tout ensemble dans lequel cette fonction est fréquemment.

6°) Un point x adhère à l'ensemble X si et seulement si il existe une fonction orientée fréquemment dans X qui converge vers x.

7°) Un point x adhère à l'ensemble X si et seulement s'il existe une fonction orientée à valeurs dans X qui converge vers x.

§ 5. LA CONVERGENCE DES SYSTEMES QUELCONQUES.-

Soit E un espace m-topologique. L'exclusion des systemes denses (soit encore, par les corollaires du théorème 2-N.6, les systèmes non rares) du domaine de la convergence L de l'espace E repose sur des exigences purement techniques. On peut très naturellement étendre L à tout $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ de la manière suivante : soit M l'application

$$M : \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : \mathcal{Q} \curvearrowright \{x \mid \mathcal{V}(x) \subseteq F\mathcal{Q}\}.$$

L est alors la restriction $\mathcal{A}$ de cette application M. On remarque que $\forall x \in E$, $x \in M\mathcal{V}(x)$ et que si $\emptyset \in \mathcal{Q}$, $M\mathcal{Q} = E$. On ne conserve pas le théorème 2-2.2 en ce sens que la proposition

$$x \in M\mathcal{Q} \Leftrightarrow \forall \mathcal{Q}' \text{ dense dans } \mathcal{Q}, \exists \mathcal{Q}'' \text{ dans } \bigcup \mathcal{Q}' : x \in M\mathcal{Q}'', \quad (1)$$

obtenue à partir de 2-2(3) en remplacant L par M et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, n'est pas vraie en général puisque son second membre est trivialement vérifié par $\mathcal{Q}'' = \{\emptyset\}$ et que par conséquant M serait nécessairement l'application constante E. C'est là la raison principale pour laquelle nous avons restreint la convergence aux systèmes rares sur E. Une autre possibilité serait de maintenir M et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ en remplacant dans (1) la clause $\mathcal{Q}''$ dans $\bigcup \mathcal{Q}'$ par $\bigcup \mathcal{Q}' \in G\mathcal{Q}''$ en effet si $\emptyset \in \mathcal{Q}''$, $G\mathcal{Q}'' = \emptyset$ (théorème 2-N.6 2°).

LA CONVERGENCE DES FONCTIONS SELON UNE RELATION TRANSITIVE QUELCONQUE.-

L'exclusion des relations bloquées est étroitement liée à l'exclusion des systèmes non rares en effet (théorème 2-N'.9) $\mathcal{S}(\prec)$ est un système rare si et seulement si $\prec$ n'est pas bloquée. Une raison d'exclure les relations bloquées et que l'on perdrait certaines relations entre $\mathcal{S}(<)$ et $\mathcal{F}_0(<)$ comme le théorème 2-N.10. Mais rien de tout cela n'est essentiel. La raison qui a conduit Day et Ribeiro à se restreindre aux relations non bloquées était qu'ils faisaient usage de parties cofinales du domaine des fonctions considérées et que seules les relations non bloquées donnent lieu à des parties cofinales (théoèrme 2-N'.12).

ESPACES ($\mathcal{L}$) ET ($\mathcal{L}$*)

La première tentative d'utilisation d'une notion de convergence comme concept initial est celle de Fréchet avec les espaces ($\mathcal{L}$) (FRECHET [I]). Urysohn a proposé alors un axiome supplémentaire, ce qui a conduit aux espaces ($\mathcal{L}$*) (KURATOWSKI [I]). Dudley dans un article récent a recherché les limites d'efficacité d'une telle notion de convergence.

TRAVAUX ANTERIEURS SUR LA CONVERGENCE DES FONCTIONS.-

Birkhoff a le premier étendu à la topologie la théorie de la convergence de Moore et Smith, c'est-à-dire la convergence des fonctions dont le domaine est un système dirigé (non vide et muni d'une relation transitive telle que deux éléments quelconques aient toujours un successeur commun). Il montre l'efficacité de cette notion de convergence comme concept initial pour les espaces de Hausdorff.

Tukey généralise cette notion dans des espaces définis par exemple, à partir d'une fonction d'adhérence $\overline{}$ telle que

$\overline{\emptyset} = \emptyset$ et $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$ (il s'agit donc d'espaces m_o -topologiques particuliers). Ribeiro abandonne le caractère dirigé de cette convergence et définit la convergence des fonctions dont le domaine est un système orienté (non vide et muni d'une relation transitive non bloquée) dans les espaces ($\mathcal{U}$) de Fréchet (c'est-à--dire les espaces mp_c -topologiques). Tukey t Ribeiro démontrent l'un et l'autre l'efficacité de leur notion de convergence comme concept initial pour les espaces qu'ils considèrent.

Chez ces trois auteurs, l'axiome qui assure l'efficacité de la notion de convergence comme concept initial est essentiellement le même. Soient E un ensemble, f une application dans E définie sur un ensemble quelconque D dirigé ou orienté selon le cas. L'axiome est alors :

$$x \in Lf \Leftrightarrow \forall C \text{ cofinal dans } D, \exists g : D' \to E : \mathrm{Im}\, g \subseteq f(C) \,\&\, x \in Lg . \quad (1)$$

D' étant également dirigé ou orienté. Cet axiome est inspiré des axiomes suivants : l'axiome

"toute sous-suite d'une suite convergeant vers x converge encore vers x" (Fréchet).

et l'axiome :

"si une suite ne converge pas vers x, il existe une sous-suite dont aucune sous-suite ne converge vers x" (Kuratowski d'après Urysohn).

Day étudie alors systématiquement la possibilité de construire une fonction de voisinage et une fonction d'adhérence à partir d'une notion de convergence définie pour des fonctions dont le domaine est muni d'une relation binaire quelconque.

Il arrive ainsi à montrer l'efficacité d'une convergence définie par des fonctions dont le domaine est muni d'une relation transitive non bloquée. Cette convergence est supposée maximale (et ce mot a chez Day à peu près le sens que nous lui avons donné dans le paragraphe 2-2) et correspond à une fonction de voisinage antihéréditaire et à une fonction d'adhérence monotone. On se trouve donc dans un espace m-topologique (quoique Day ne définisse explicitement que des espaces m_o -topologiques). C'est sur cet article (DAY [2]) que nous nous sommes basés à peu près uniquement dans ce travail et nous avons construit la convergence des systèmes rares dans le but premier de rejoindre par ce détour les résultats de Day sur la convergence des fonctions. Des différences apparaissent cependant par rapport à l'article de Day, qui sont dues surtout à une simplification de certaines des relations imposées entre les différents concepts initiaux envisagés. En particulier nous avons adopté entre les voisinages et l'adhérence la relation 1-1(2) que Day signale mais n'utilise pas. Comme cette relation donne une correspondance bijective entre les fonctions de voisinages et les fonctions d'adhérence, nous avons pu isoler les faits concernant ces deux concepts, ce qui a donné naissance auchapitre I.

Pour la convergence des fonctions, nous avons également remplacé les relations de Day par d'autres essentiellement équivalentes en utilisant les généralisations mot pour mot des notions "finalement dans" et "fréquemment dans" de Kelley.

Kelley dans les deux textes cités sur la convergence (KELLEY [I] et [3]) introduit un nouveau concept de sous-système pour remplacer les restrictions à une partie cofinale du domaine qu'on avait utilisées jusque là (comme par exemple dans la proposition (1)). Cela lui permet de donner une forme plus symétrique à l'axiome (1) de Birkhoff. Il s'agit ici de convergence à caractère dirigé dans des espaces topologiques. La modification de l'axiome paraît liée à ce caractère dirigé et nous n'avons pu trouver un axiome de cette forme pour la convergence des systèmes rares.

CONVERGENCE DES FILTRES.-

Il n'existe à notre connaissance aucun travail antérieur au nôtre sur la convergence des systèmes rares. Ceux-ci généralisent les bases de filtres. La convergence des filtres en topologie a été introduite par Cartan (CARTAN [2]). Elle a été étendue à des espaces plus généraux par Choquet et par Fischer (voir aussi HARBARTH [1]). Ces espaces ont évidemment toujours un caractère filtrant en ce sens que, par exemple, l'adhérence $\overline{}$ qu'on y définit jouit de la propriété $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, ou encore que le système des voisinages d'un point y est toujours un filtre.

Signalons encore une notion de convergence des fonctions basée uniquement sur des relations binaires (c'es-à-dire non seulement dans le domaine de la fonction mais aussi comme structure de l'espace ou elle converge (BENNET [1]) et une propriété des relations binaires définiepar Kenyon et Morse et proposée en remplacement de la propriété de transitivité.

CHAPITRE 3 - Espaces p-topologique, mp-topologique et mpi-topologique.-

§ 1. VOISINAGES PROPRES, INTERIEUR DEGRESSIF ET ADHERENCE PROGRESSIVE. AXIOME (p). ESPACE p-TOPOLOGIQUE.-

Soit $(E,\mathcal{V})$ un espace general-topologique.

DEFINITION 1 : La fonction de voisinage $\mathcal{V}$ sera dite propre si et et seulement si

$$\forall x \in E, \forall V \in \mathcal{V}(x), x \in V. \qquad (1)$$

La fonction d'intérieur sera dite dégressive si et seulement si elle est dégressive dans l'ordonné $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, c'est-à-dire si

$$\forall X \subseteq E, \quad iX \subseteq X. \qquad (2)$$

De même, la fonction d'adhérence sera dite progressive si et seulement si

$$\forall X \subseteq E, aX \supseteq X. \qquad (3)$$

THEOREME 1 : Les propositions (1), (2) et (3) sont équivalentes.

Démonstration :

1°) $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$ équivaut par 1-1(1) à $x \in iV \Rightarrow x \in V$, d'où (1) équivaut à (2).

2°) Si dans (2) on substitue $\sim X$ à X, il vient $\forall X \subseteq E$, $i\sim X \subseteq \sim X$. Alors en utilisant 1-1(4) on trouve $\forall X \subseteq E$, $aX \supseteq X$. ∎

La proposition (1) sera dite axiome (p) relatif à la fonction de voisinage, la proposition (2), axiome (p) relatif à la fonction d'intérieur et la proposition (3), axiome (p) relatif à la fonction d'adhérence. Un espace general-topologique vérifiant l'un de ces trois axiomes sera dit vérifier l'axiome (p).

DEFINITION 2 : Nous appellerons espace p-topologique un espace general-topologique vérifiant l'axiome (p).
La general-topologie d'un tel espace sera dite aussi p-topologie.

DERIVATION ET POINTS D'ACCUMULATION.-

Soit E un espace p-topologique.

DEFINITION 3 : L'ensemble dérivé d'un ensemble X contenu dans E sera noté dX. Il est défini par

$$dX \underset{\text{déf}}{=} \{ x \mid (\sim X \cup \{x\}) \notin \mathcal{V}(x) \}. \qquad (4)$$

L'application $d : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : X \mapsto dX$ est dite dérivation de l'espace E et on dira que x est un point d'accumulation de X si et seulement si $x \in dX$.

La dérivation est étroitement liée à la fonction d'adhérence.

THEOREME 2 :

1°) x est un point d'accumulation de X si et seulement s'il adhère à $X \sim \{x\}$.

2°) L'adhérence d'un ensemble X est l'union de X et de son dérivé.

démonstration.

1°) $\sim X \cup \{x\} = \sim(X \sim \{x\})$ d'où, par (4), $x \in dX \iff \sim(X \sim \{x\}) \notin \mathcal{U}(x)$ et, par 1-1(2), $x \in dX \iff x \in a(X \sim \{x\})$.

2°) Soit $x \in aX$. Alors ou bien $x \in X$; ou bien $x \notin X$ et donc $X \sim \{x\} = X$. Dans le second cas $x \in a(X \sim \{x\}) = aX$, c'est-à-dire $x \in dX$. On a donc en tout cas $x \in X \cup dX$. Inversément, soit $x \in X \cup dX$. Alors ou bien $x \in X$ et dans ce cas, par (3), $x \in aX$; ou bien $x \notin X$, c'est-à-dire $X \sim \{x\} = X$. Dans ce cas $x \in dX$ et donc $x \in a\,(X \sim \{x\}) = aX$. On a donc en tout cas $x \in aX$. ∎

COROLLAIRE : $V \in \mathcal{U}(x) \iff x \in V \,\&\, x \notin d \sim V$. (5)

THEORME 3 : Le fait que x soit un point d'accumulation de l'ensemble X ne dépend pas de l'appartenance éventuelle de x à X, c'est-à-dire que $\forall x \in E, \forall X \subseteq E,\ x \in dX \iff x \in d(X \sim \{x\})$. (6)

Démonstration. Comme $X \sim \{x\}$ ne contient pas x, $(X \sim \{x\}) \sim \{x\} = X \sim \{x\}$ et donc $\forall x \in E, \forall X \subseteq E,\ x \in a(X \sim \{x\}) \iff x \in a\,[(X \sim \{x\}) \sim \{x\}]$. En transformant les deux membres de cette équivalence par le théorème 2.1°, on trouve exactement (6). ∎

La propriété de vérifier (6) est d'abord une propriété intuitivement remarquable de la notion de point d'accumulation. De plus, la proposition (6) caractérise le fait que d est une dérivation en ce sens que (6) peut servir d'axiome pour l'utilisation de la dérivation comme concept initial.

LA DERIVATION COMME CONCEPT INITIAL DE LA STRUCTURE D'ESPACE p-tOPOLOGIQUE.-

Soit E un ensemble et soit d une application : $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

A partir de d, définissons une application $a_d : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ par

$$a_d X \underset{\text{déf}}{=} X \cup dX. \qquad (7)$$

Il est évident que

THEOREME 4 : L'application a_d vérifie l'axiome (p) relatif à la fonction d'adhérence.

Comme toute application $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, a_d est la fonction d'adhérence d'un et d'un seul espace general-topologique (théorème 1-1.2) que nous noterons $(E, \mathcal{U}_d)$. C'est un espace p-topologique par le théorème 4.

THEOREME 5 :

1°) x est point d'accumulation de X dans l'espace $(E, \mathcal{U}_d)$ si et seulement si $x \in d\,(X \sim \{x\})$.

2°) La dérivation de l'espace $(E, \mathcal{V}_d)$ estprécisément d si et seulement si d vérifie la proposition (6).

3°) L'espace $(E, \mathcal{V}_d)$ est le seul espace p-topologique dont d soit la dérivation.

Démonstration.

1°) Par le théorème 2.1° (l'espace $(E, \mathcal{V}_d)$ étant p-topologique) x est un point d'accumulation de X si et seulement si $x \in a_d(X \sim \{x\})$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in (X \sim \{x\}) \cup d(X \sim \{x\})$, par la définition même de a_d. Comme x n'est jamais dans $X \sim \{x\}$ on a finalement la thèse du 1°.

2°) Supposons que d vérifie (6). Alors $x \in d(X \sim \{x\})$ équivaut à $x \in dX$ et le 1° donne : x est un point d'accumulation de X si et seulement si $x \in dX$, ce qui, par la définition des points d'accumulation, signifique d est la dérivation de l'espace $(E, \mathcal{V}_d)$. Inversément si d est la dérivation de l'espace p-topologique $(E, \mathcal{V}_d)$, on a le théorème 3 et donc d vérifie (6).

3°) Supposons que d soit la dérivation de l'espace p-topologique $(E, \mathcal{V})$ et soit a la fonction d'adhérence de cet espace. On a, par le théorème 2.2°, $aX = X \cup dX$. Or cette proposition définit aussi a_d. Ainsi $a_d = a$ et donc (théorème 1-1.2) $\mathcal{V}_d = \mathcal{V}$. ∎

Dans la suite, la dérivation de n'importe quel espace p-topologique sera notée d sauf mention explicite du contraire.

OUVERTS ET FERMES.-

Soit E un espace p-topologique.

THEOREME 6 :

1°) Un ensemble est ouvert si et seulement s'il est un voisinage de tous ses points et seulement de ceux-là.

2°) Un ensemble est ouvert si et seulement s'il est égal à son intérieur.

Ce sont des conséquences immédiates de l'axiome (p).

THEOREME 7 :

1°) Un ensemble est fermé si et seulement s'il est égal à son adhérence.

2°) Un ensemble est fermé si et seulement s'il contient son dérivé.

Le 1° est une conséquence immédiate de l'axiome (p).

Démonstration. 2° $dF \subseteq F$ équivaut à $F \cup dF \subseteq F$ ce qui par le théorème 2.2° sur l'adhérence exprime exactement que F est fermé. ∎

AXIOME ($_\circ$)

Soit E un espace p-topologique.

THEOREME 8 : L'axiome ($_\circ$) est encore équivalent à $d\emptyset = \emptyset$ (8)

Démonstration. (8) est équivalent à $d\emptyset \subseteq \emptyset$ et donc exprime que le vide est fermé, ce qui est l'axiome ($_\circ$) relatif à la fonction d'adhérence. ∎

CONTINUITE.-

Soit E et E' deux espaces p-topologiques et f une application $E \longrightarrow E'$. Soient $\mathcal{V}'$, a' et d' la fonction de voisinage, d'adhérence et la dérivation de l'espace E'.

THEOREME 9 :

La continuité de f équivaut encore à
$$\forall X' \subseteq E',\ d\, f^{-1}X' \subseteq f^{-1}a'X'. \qquad (9)$$

Démonstration. La proposition 1-2(3) donne, par le théorème 2.2°, $f^{-1}X' \cup df^{-1}X' \subseteq f^{-1}X' \cup f^{-1}d'X'$, c'est-à-dire $df^{-1}X' \subseteq f^{-1}X' \cup f^{-1}d'X'$. ∎

THEOREME 10 : Si l'application f est injective, la proposition (9) peut être remplacée par

$$\forall X' \subseteq E',\ df^{-1}X' \subseteq f^{-1}d'X'. \qquad (10)$$

Démonstration. Il est clair que (10) entraîne (9). Inversément si l'on suppose f continue, c'est-à-dire, par exemple, 1-2(3) on a $a(f^{-1}X' \sim \{x\}) = f^{-1}\mathfrak{a}'(X' \sim \{f(x)\})$ puisque, f étant injective, $f^{-1}X' \sim \{x\} = f^{-1}(X' \sim \{f(x)\})$, et par conséquent (théorème 2.1°) $x \in df^{-1}X' \Rightarrow f(x) \in d'X'$. ∎

<u>THEOREME 11</u> : L'application f est fermée si et seulement si

$$\forall X \subseteq E,\ d'fX \subseteq faX. \tag{11}$$

Démonstration. La proposition 1-2(6) donne avec le théorème 2.2° : $fX \cup d'fX \subseteq fX \cup fdX$, c'est-à-dire $d'fX \subseteq fX \cup fdX$. ∎

Soit (E,) un espace p-topologique et soit (E', ') un espace general-topologique.

<u>THEOREME 12</u> : S'il existe une surjection continue : $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}')$, alors $(E', \mathcal{V}')$ est un espace p-topologique.

Démonstration. Soit f continue. $\forall V \in \mathcal{V}'(f(x))$, $f^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$ et donc (axiome (p) relatif à $\mathcal{V}$) $x \in f^{-1}V$, ce qui entraîne $f(x) \in V$. ∎

COMPARAISON DES p-TOPOLOGIES.-

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux p-topologies sur un ensemble E et soit d' la dérivation de l'espace $(E, \mathcal{V}')$.

THEOREME 13 : $\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{V}'$ si et seulement si

$$\forall X \subseteq E, dX \subseteq d'X. \qquad (12)$$

C'est l'expression (10) de la continuité de l'identité.

RELATIVISATION.-

Soient E un espace p-topologique et D une partie de E, La general-topologie $\mathcal{V}_d$ induite sur D par la p-topologie est une p-topologie en effet si $x \in V$ et $x \in D$, $x \in D \cap V$. Soit d_D la dérivation correspondante.

DEFINITION 4 : Nous appellerons p-topologie induite sur D par la p-topologie de E la general-topologie induite.

THEOREME 14 : $\forall X \subseteq E, \ d_D(X \cap D) \subseteq dX \cap D. \qquad (13)$

C'est l'expression (10) de la continuité de l'injection canonique d'inclusion puisque $j^{-1}X = X \cap D$.

---

p-TOPOLOGIE ASSOCIEE A UNE general-TOPOLOGIE.-

Soit $(E, \mathcal{V})$ un espace general-topologique. Si l'on cherche à associer à $\mathcal{V}$ une p-topologie deux manières au moins se présentent à l'esprit, que l'on peut considérer comme assez naturelles : ou bien supprimer tous les voisinages de x qui ne contiendraient pas x ou bien ajouter le point x à tous ses voisinages. Pour nous décider en faveur d'une de ces deux possibilités (ou d'une autre encore) nous allons observer ce qui se passe lorsque l'on cherche à maintenir dans un espace general-topologique la définition 3. Soit $d_{\mathcal{V}}$ l'application définie par (4) à partir de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire par

$$x \in d_{\mathcal{V}} X \underset{déf}{\Longleftrightarrow} \sim(X \sim \{x\}) \notin \mathcal{V}(x). \qquad (14)$$

Comme $X \sim \{x\} = (X \sim \{x\}) \sim \{x\}$, $d_{\mathcal{V}}$ vérifie la proposition (6) et est donc (théorème 5.2° et 3°) la dérivation d'un et d'un seul espace p-topologique. Il serait assez naturel de considérer cet espace p-topologique comme associé au premier. Soit $\mathcal{V}^*$ safonction de voisinage. On doit avoir (corollaire du théorème 2) $\mathcal{V}^*(x) = \{V \mid x \in V \,\&\, x \notin d_{\mathcal{V}} \sim V\}$. De là on tire, comme relation entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{V}^*(x) = \{V \mid x \in V \,\&\, V \in \mathcal{V}(x)\}$.
En effet, soit $V \in \mathcal{V}^*(x)$; on a $x \in V$ et $x \notin d \sim V$, c'est-à-dire $x \notin a \sim V$, soit encore $V \in \mathcal{V}(x)$. Inversément si $x \in V \,\&\, V \in \mathcal{V}(x)$ alors $V = V \cup \{x\}$ et donc $x \notin d_{\mathcal{V}} \sim V$, d'où $V \in \mathcal{V}^*(x)$.

DEFINITION 5 : Nous appellerons p-topologie associée à $\mathcal{V}$ la p-topologie $\mathcal{V}^*$ définie par

$$V \in \mathcal{V}^*(x) \underset{déf}{\Longleftrightarrow} x \in V \,\&\, V \in \mathcal{V}(x). \qquad (15)$$

Soient $(E,\mathcal{V})$ et $(E',\mathcal{V}')$ deux espaces general-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$.

<u>THEOREME 15</u> : Si f est continue : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E',\mathcal{V}')$, alors f est aussi continue : $(E,\mathcal{V}^*) \longrightarrow (E',\mathcal{V}'^*)$.

Démonstration. Supposons $\forall x \in E, \forall V \in \mathcal{V}'(f(x)),\ f^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$. Comme $f(x) \in V \implies x \in f^{-1}V$ on a $(V \in \mathcal{V}'(f(x))\ \&\ f(x) \in V) \implies (f^{-1}V \in \mathcal{V}(x)$ $\&\ x \in f^{-1}V)$ d'où finalement $\forall x \in E, \forall V \in \mathcal{V}'^*(f(x)),\ f^{-1}V \in \mathcal{V}^*(x)$. ▮

Il est clair que l'on pourrait définir une catégorie des espaces p-topologiques et un **foncteur** * défini sur la catégorie des espaces general-topologiques par

$$(\mathcal{V}, f, \mathcal{V}')^* \underset{\text{déf}}{=} (\mathcal{V}^*, f, \mathcal{V}'^*).$$

La discussion reproduirait presque mot pour mot la section correspondante du paragraphe 2-3. Nous nous contenterons de commenter le théorème 15 en disant que le passage à la p-topologie associée a un caractère **fonctoriel.** On vérifierait très rapidement que ce caractère fonctoriel est absent de l'autre passage envisagé plus haut, à savoir : ajouter x à chacun de ses voisinages. On remarque aussi :

<u>THEOREME 16</u> : la p-topologie $\mathcal{V}^*$ associée à $\mathcal{V}$ est la plus fine des p-topologies moins fines que $\mathcal{V}$.

On voit d'autre part qu'il n'existe pas de p-topologie plus fine que $\mathcal{V}$ à moins que $\mathcal{V}$ ne soit déjà une p-topologie.

---

p-TOPOLOGIES PROJECTIVE ET PRODUIT.-

Soient E un ensemble et $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces p-topologiques. Pour chaque i dans I, soit f_i une application : $E \longrightarrow E_i$. Si $V \in \mathcal{V}_i(f_i(x))$ on a $f_i(x) \in V$ et donc $x \in f_i^{-1}V$. Ainsi la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective est une p-topologie.

DEFINITION 6 : Nous appellerons p-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective sur E la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective.

C'est (théorème 1-2.12) la moins fine des p-topologies qui rendent continue toutes les f_i. Bien entendu dans le cas du produit cartésien on parlera de p-topologie produit et d'espace p-topologique produit.

---

p-TOPOLOGIE PROJECTIVE DE p-TOPOLOGIES ASSOCIEES.-

Soient E un ensemble, $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces general-topologiques et les f_i des applications : $E \longrightarrow E_i$. Considérons sur E les deux general-topologies suivantes :

$\mathcal{V}$, la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective,

et $\mathcal{V}'$, la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i^*)$-projective ($\mathcal{V}_i^*$ étant la p-topologie associée à $\mathcal{V}_i$) qui est aussi, par définition, la p-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i^*)$-projective.

THEOREME 17 : La p-topologie projective $\mathcal{V}'$ des p-topologies $\mathcal{V}_i{}^*$ associées aux $\mathcal{V}_i$ est la p-topologie $\mathcal{V}^*$ associée à la general-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective $\mathcal{V}$.

Démonstration. Par le théorème 15, les f_i sont continues $(E, \mathcal{V}^*) \longrightarrow (E_i, \mathcal{V}_i{}^*)$ et donc $\mathcal{V}^* \geq \mathcal{V}'$, $\mathcal{V}'$ étant la moins fine des p-topologies qui .... Inversément soit $W \in \mathcal{V}^*(x)$, c'est-à-dire $W \in \mathcal{V}(x)$ & $x \in W$, soit encore $x \in W$ et W est de la forme $f_k^{-1} V$ avec $V \in \mathcal{V}_k(f_k(x))$. Alors $f_k(x) \in V$ d'où $V \in \mathcal{V}_k^*(f_k(x))$ et $W = f_k^{-1} V \in \mathcal{V}'(x)$. Ainsi $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{V}'$. ∎

---

p-TOPOLOGIE QUOTIENT.-

Si E est un espace p-topologique, l'extension de la fonction de voisinage $\mathcal{V}$ à tout $\mathcal{P}(E)$ est également <u>propre</u> en ce sens que $V \in \mathcal{V}(X) \Longrightarrow X \subseteq V$. En effet $V \in \mathcal{V}(X)$ équivaut à $X \subseteq iV$ (théorème 1-2.15) et i est dégressive.

Soient $(E, \mathcal{V})$ un espace p-topologique, E' un ensemble et f une application : $E \longrightarrow E'$. La general-topologie quotient $\mathcal{V}_f$ n'est pas en général une p-topologie puisque si $y \notin \mathrm{Im}\, f$, $\mathcal{V}(y) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

DEFINITION 7 : Nous appellerons <u>p-topologie quotient de</u> $\mathcal{V}$ <u>par</u> f la p-topologie $\mathcal{V}_f^*$ associée à la général-topologie quotient $\mathcal{V}_f$.

C'est (théorème 16 et 1-2.16) la plus fine des p-topologies sur E' qui rendent f continue. Le caractère p-topologique se transportant sur l'image de f lorsque celle-ci est continue (théorème 12) $\mathcal{V}_f$ et $\mathcal{V}_f*$ se confondent sur Imf. Par conséquent, dans le cas où f est surjective, la p-topologie quotient est simplement la general-topologie quotient. Si p est la projection canonique de E sur un quotient $\frac{E}{f}$ (ou $\frac{E}{R}$) on **dira** encore que $(\frac{E}{f}, \mathcal{V}_p)$ ou $(\frac{E}{R}, \mathcal{V}_R)$ est <u>l'esapce p-topologique quotient de</u> $\mathcal{V}$ <u>par</u> f (ou <u>par</u> R).

<u>p-TOPOLOGIE QUOTIENT D'UNE p-TOPOLOGIE ASSOCIEE.-</u>

Soient $(E, \mathcal{V})$ un espace general-topologique, E' un ensemble et f une application surjective : $E \longrightarrow E'$. Considérons sur E' les deux general-topologies suivantes :

$\mathcal{V}_f$, la general-topologie quotient de $\mathcal{V}$ par f,

et $(\mathcal{V}*)_f$, la general-topologie quotient de $\mathcal{V}*$ par f ($\mathcal{V}*$ étant la p-topologie associée à $\mathcal{V}$) qui est aussi la p-topologie quotient de $\mathcal{V}*$ par f.

<u>THEOREME 18</u> : La p-topologie $(\mathcal{V}*)_f$ quotient par f de la p-topologie $\mathcal{V}*$ associée à $\mathcal{V}$ est la p-topologie $\mathcal{V}_f*$ associée à la general-topologie $\mathcal{V}_f$ quotient de $\mathcal{V}$ par f.

Remarquons d'abord que $V \in \mathcal{V}*(X)$ équivaut à $X \subseteq V \,\&\, V \in \mathcal{V}(X)$ puisque $\forall x \in X,\ V \in \mathcal{V}*(X)$ équivaut à $\forall x \in X,\ x \in V \,\&\, V \in \mathcal{V}(x)$.

Démonstration du théorème 18 : Comme f est continue : $(E, \mathcal{V}) \longrightarrow (E', \mathcal{V}_f)$, elle est encore continue : $(E, \mathcal{V}^*) \longrightarrow (E', \mathcal{V}_f^*)$ (théorème 15). Or $(\mathcal{V}^*)_f$ est la plus fine des p-topologies qui ...... Donc $(\mathcal{V}^*)_f \supseteq \mathcal{V}_f^*$.
D'autre part $\mathcal{V}^*$ étant moins fine que $\mathcal{V}$, $(\mathcal{V}^*)_f$ est moins fine que $\mathcal{V}_f$ et donc (théorème 16) $\mathcal{V}_f^* \supseteq (\mathcal{V}^*)_f$. ▮

---

§ 2. CONVERGENCE PROPRE, DERIVATION MONOTONE . ESPACE mp-TOPOLOGIQUE.-

Soit E un espace m-topologique.

DEFINITION 1 : On dira que L est propre si et seulement si

$$\forall x \in E \ , \ x \in L\{\{x\}\}. \tag{1}$$

THEOREME 1 : E vérifie l'axiome (ρ) si et seulement si L est propre.

Démonstration. La proposition $\forall V \in \mathcal{V}(x), \ x \in V$ équivaut à $\mathcal{V}(x) \subseteq F\{\{x\}\}$ et les propositions 3-1(1) et (1) sont donc équivalentes. ▮

Soit E un espace p-topologique.

THEOREME 2 : E vérifie l'axiome (m) si et seulement si d est monotone croissante dans l'ordonné $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, c'est-à-dire si $\forall X \text{ et } Y \subseteq E, X \subseteq Y \Rightarrow dX \subseteq dY.$ (2)

Démonstration. Si a est monotone, $X \subseteq Y$ entraîne $a(X \sim \{x\}) \subseteq a(Y \sim \{x\})$, et donc $x \in dX \Longrightarrow x \in dY$. Inversément si d est monotone $X \subseteq Y$ entraîne $X \cup dX \subseteq Y \cup dY$ et a est donc monotone.∎

La proposition (1) <u>sera dite axiome</u> (p) <u>relatif à la convergence</u> et la proposition (2), <u>axiome</u> (m) <u>relatif à la dérivation</u>.

<u>DEFINITION 2</u> : Nous appellerons <u>espace mp-topologique</u> un espace general-topologique vérifiant les axiomes (m) et (p).

La general-topologie d'un tel espace sera dite encore <u>mp-topologie</u>.

Soit E, un espace mp-topologique.

<u>THEOREME 3</u> : Un point x est un point d'accumulation d'un ensemble X si et seulement si X rencontre tous les voisinages de x en une intersection non vide et non réduite au seul point x.

Soit à démontrer : $x \in dX \Longleftrightarrow X \sim \{x\} \in G\mathcal{V}(x)$ (3)

Démonstration. $x \in dX \Longleftrightarrow x \in a(X \sim \{x\})$ (théorème 3-1.2.1°) et $x \in a(X \sim \{x\}) \Longleftrightarrow X \sim \{x\} \in G\mathcal{V}(x)$ (théorème 2-1.2.2°).∎

THEOREME 4 : $\forall x \in E, \forall \mathcal{a} \in \mathcal{A}$,

$$x \in L\mathcal{a} \iff \forall X \subseteq E,\ X \sim \{x\} \in G\mathcal{a} \implies x \in dX. \quad (4)$$

Démonstration. Par 2-2(16), $x \in L\mathcal{a} \implies [\forall X \subseteq E,\ X \sim \{x\} \in G\mathcal{a} \implies x \in a(X \sim \{x\})]$, d'où (théorème 3-1.2.1°) l'implication directe de (4). Inversément supposons le second membre de (4) et soit $Y \in G\mathcal{a}$. Alors ou bien $x \in Y$ et donc $x \in aY$, ou bien $x \notin Y$ mais alors $Y \sim \{x\} = Y \in G\mathcal{a}$ et donc, par le second membre de (4), $x \in dY$. Ainsi en tout cas $x \in aY$ et donc $\forall Y \subseteq E,\ Y \in G\mathcal{a} \implies x \in aY$, ce qui, par 2-2(16) encore, est exactement $x \in L\mathcal{a}$. ∎

THEOREME 5 : $\forall\ x \in E,\ \forall X \subseteq E$,

$$x \in dX \iff \exists \mathcal{a} \in \mathcal{A} : X \sim \{x\} \in G\mathcal{a} \,\&\, x \in L\mathcal{a} \quad (5)$$

et $$x \in dX \iff \exists \mathcal{a} \in \mathcal{A} \text{ dans } X \sim \{x\} : x \in L\mathcal{a}. \quad (6)$$

Démonstration. Les seconds membres de (5) et de (6) sont l'un et l'autre équivalents à $x \in a(X \sim \{x\})$ (2-2(I7) et 2-2(18)), d'où la thèse par le théorème 3-1.2.1°. ∎

CONTINUITE.-

Soient E et E' deux espaces mp-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$. Soient a' et d' la fonction d'adhérence et la dérivation de l'espace E'.

THEOREME 6 : f est continue si et seulement si

$$\forall X \subseteq E, \; f dX \subseteq a' f X. \tag{7}$$

Démonstration. La proposition 2-3(5), donne, par le théorème 3-1.2.2°, $fX \cup fdX \subseteq fX \cup d'fX$, c'est-à-dire $fdX \subseteq fX \cup d'fX$. ∎

RELATIVISATION.-

La general-topologie induite sur une partie D d'un espace mp-topologique E est une mp-topologie d'après les considérations qui précèdent lesdéfinitions 2-3.1 et 3-1.4.

DEFINITION 3 : Nous appellerons mp-topologie induite sur D par la mp-topologie de E la general-topologie induite.

THEOREME 7 : L'ensemble dérivé de l'ensemble X dans D est l'intersection avec D du dérivé de X dans l'espace E.

Soient a_D et d_D la fonction d'adhérence et la dérivation correspondant à la mp-topologie induite.

Démonstration. $x \in d_D X \iff x \in a_D(X \sim \{x\})$ (théorème 3-1.2.1°) et $a_D(X \sim \{x\}) = a(X \sim \{x\}) \cap D$ (théorème 2-3.9). Ainsi $x \in d_D X$ équivaut à $x \in a(X \sim \{x\}) \,\&\, x \in D$, soit encore $x \in dX \,\&\, x \in D$. ∎

<u>COROLLAIRE</u> : D est fermé si et seulement si $\forall X \subseteq D$, $d_D X = dX$.

Démonstration. Si D est fermé, $dD \subseteq D$ et donc a fortiori, par la monotonie de D, $dX \subseteq D$ pour $X \subseteq D$. Alors $dX \cap D = dX$ et $d_D X = dX$. Inversément $d_D D = dD$ équivaut à $dD \cap D = dD$, c'est-à-dire à $dD \subseteq D$. ▮

<u>mp-TOPOLOGIES PROJECTIVE ET PRODUIT.-</u>

Soient E un ensemble et $\{(E_i, \mathcal{U}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces mp-topologiques. Pour chaque i dans I, f_i est une application : $E \longrightarrow E_i$. La m-topologie $(f_i, \mathcal{U}_i)$-projective est plus fine que la general-topologie projective et celle-ci est une p-topologie d'après les considérations qui précèdent la définition 3-1.6.

<u>DEFINITION 4</u> : Nous appellerons <u>mp-topologie</u> $(f_i, \mathcal{U}_i)$-<u>projective sur</u> E la m-topologie $(f_i, \mathcal{U}_i)$-projective.

C'est (théorème 2-3.20) la moins fine de toutes les mp-topologies sur E qui rendent toutes les f_i continues. Dans le cas du produit cartésien on parlera aussi de <u>mp-topologie produit</u> et d'<u>espace mp-topologique produit</u>.

---

mp-TOPOLOGIE QUOTIENT.-

Soient $(E,\mathcal{V})$ un espace mp-topologique, E' un ensemble et f une application : $E \longrightarrow E'$. La p-topologie $\mathcal{V}_f^*$, quotient de $\mathcal{V}$ par f, est également une m-topologie. Supposons en effet $W \supseteq V$ et $V \in \mathcal{V}_f^*(y)$, c'est-à-dire $y \in V \& f^{-1}V \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$. Comme $\mathcal{V}$ est antihéréditaire on a encore $f^{-1}W \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$ et comme $y \in V$ on a aussi $y \in W$. Donc $W \in \mathcal{V}_f^*(y)$ et $\mathcal{V}_f^*(y)$ est bien antihéréditaire.

<u>DEFINITION 5</u> : Nous appellerons <u>mp-topologie quotient de</u> $\mathcal{V}$ <u>par</u> f la p-topologie quotient $\mathcal{V}_f^*$.

C'est, comme p-topologie quotient, la plus fine des mp-topologies sur E' qui rendent f continue. Si f est surjective $\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_f^*$ et la mp-topologie quotient est simplement la general-topologie quotient.

§ 3. AXIOME (i)

Soit E un espace general-topologique.

THEOREME 1 : Les trois propositions suivantes sont équivalentes

$$\forall x \in E, \forall X \in \mathcal{V}(x), \{y \mid X \in \mathcal{V}(y)\} \in \mathcal{V}(x), \qquad (1)$$

$$\forall X \subseteq E, \quad iX \text{ est ouvert} \qquad (2)$$

$$\text{et } \forall X \subseteq E, \quad aX \text{ est fermé.} \qquad (3)$$

Démonstration.

1°) Comme $\{y \mid X \in \mathcal{V}(y)\}$ est simplement iX, la proposition (1) peut s'écrire, par 1-1(1), $\forall x \in E$, $\forall X \subseteq E$, $x \in iX \Longrightarrow x \in iiX$ et sous cette forme elle est visiblement équivalente à (2).

2°) Si dans (2) on substitue $\sim X$ à X, on trouve : $\forall X \subseteq E$, $i \sim X$ est ouvert. Or aX est le complémentaire de $i \sim X$ et donc, par le théorème 1-1.3, (2) équivaut à (3).

La proposition (1) sera dite axiome (i) relatif à la fonction de voisinage, la proposition (2), axiome (i) relatif à la fonction d'intérieur et la proposition (3), axiome (i) relatif à la fonction d'adhérence. Un espace general-topologique vérifiant l'un de ces trois axiomes sera dit vérifier l'axiome (i).

Soit E un espace p-topologique.

<u>THEOREME 2</u> : L'espace E vérifie l'axiome (i) si et seulement si la fonction d'intérieur est idempotente et si et seulement si la fonction d'adhérence est idempotente, c'est-à-dire si ii = i ou si aa = a. Ce sont des conséquences immédiates des théorèmes 3-1.6.2° et 3-1.7.1°.

Soient E un espace m-topologique.

<u>THEOREME 3</u> : E vérifie l'axiome (i) si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \forall X \in \mathcal{V}(x),\ \exists Y \text{ ouvert dans } E : x \in Y \ \&\ X \in \mathcal{V}(Y). \qquad (4)$$

Démonstration. Si x appartient à l'ouvert Y, alors (théorème 1-1.4) $Y \in \mathcal{V}(x)$. Si de plus $X \in \mathcal{V}(Y)$, c'est-à-dire (théorème 1-2.15) si $Y \subseteq iX$, alors $iX \in \mathcal{V}(x)$ puisque $\mathcal{V}$ est antihéréditaire. D'où (1) entraîne (4) puisque $iX = \{ y \mid X \in \mathcal{V}(y) \}$. Inversément supposons (2) et soit $X \in \mathcal{V}(x)$. On a $x \in iX$ par 1-1(1). On a iX est ouvert par (2). On a $X \in \mathcal{V}(iX)$ puisque $iX \supseteq iX$ (théorème 1-2.15). Ainsi (2) entraîne (4). ∎

Soit E un espace mp-topologique.

<u>THEOREME 4</u> : E vérifie l'axiome (i) si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall X \in \mathcal{V}(x), \exists Y \text{ ouvert dans } E : x \in Y \ \&\ Y \subseteq X. \qquad (5)$$

C'est la forme de l'axiome (i) que l'on utilise habituellement pour les voisinages en topologie.

Démonstration. Les voisinages étant propres (axiome (p)), $X \in \mathcal{V}(Y)$ implique $X \supseteq Y$. D'autre part $\mathcal{V}$ étant antihéréditaire (axiome (m)), si Y est un ouvert contenu dans X, alors $X \in \mathcal{V}(Y)$ Finalement si Y est un ouvert on a $\forall X \subseteq E$, $X \in \mathcal{V}(Y) \iff X \supseteq Y$ et par conséquent (4) équivaut à (5). ∎

ESPACE mpi-TOPOLOGIQUE.-

DEFINITION 1 : Nous appellerons espace mpi-topologique un espace general-topologique vérifiant les axiomes (m), (p) et (i).

Soit E un espace mpi-topologique.

THEOREME 5 : V est un voisinage d'un point x si et seulement si V contient un ouvert contenant ce point.

Démonstration. Si O est un ouvert comprenant x, $O \in \mathcal{V}(x)$ et donc, $\mathcal{V}$ étant antihéréditaire, $V \supseteq O$ entraîne $V \in \mathcal{V}(x)$. L'implication opposée est simplement la forme (5) de l'axiome (i). ∎

THEOREME 6 :

1°) L'intérieur de l'ensemble X est le plus grand ouvert contenu dans X.

2°) L'adhérence de l'ensemble X est le plus petit fermé contenant X.

Démonstration.

1°) Si O ouvert est contenu dans X, alors, i étant monotone, on a $iO \subseteq iX$, d'où $O \subseteq iX$. D'autre part iX est lui-même ouvert (axiome (i)).

2°) Si F fermé contient X, alors $aF \supseteq aX$, d'où $F \supseteq aX$. D'autre part, aX est un fermé. ▮

LA FAMILLE DES OUVERTS COMME CONCEPT INITIAL DE LA STRUCTURE mpi-TOPOLOGIQUE.-

Le théorème 5 permet de caractériser entièrement la fonction de voisinage d'un espace mpi-topologique à partir des ouverts de cet espace. Un tel espace étant en particulier un espace m-topologique, on sait (théorème 2-3.1.1°) que l'union d'une famille quelconque d'ouverts et encore un ouvert. En fait cette propriété est aussi suffisante pour l'efficacité de la notion d'ensemble ouvert comme concept initial de la structure d'un espace mpi-topologique.

Soient E un ensemble et $\mathcal{O}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. A partir de $\mathcal{O}$ nous définirons une general-topologie $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}$ sur E par l'équivalence

$$V \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(x) \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \ \& \ O \subseteq V. \qquad (6)$$

<u>THEOREME 7</u> : $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}$ est une mpi-topologie sur E.

Démonstration. (m) : $\mathcal{V}$ est antihéréditaire par la transitivité de l'inclusion,

(p) ; $x \in O \subseteq V$ entraîne $x \in V$ et $\mathcal{V}$ est donc propre,

(i) : d'abord les éléments de $\mathcal{O}$ sont des ouverts de l'espace

$(E, \mathcal{V}_{\Theta})$ en effet si $O \in \Theta$, $x \in O \subseteq O$ et donc $\forall x \in O$, $O \in \mathcal{V}(x)$. Alors $\mathcal{V}_{\Theta}$, étant définie par l'équivalence (6), vérifie évidemment (5). Or comme on a démontré déjà que $\mathcal{V}_{\Theta}$ est une mp-topologie, (5) est (théorème 4) l'axiome (i) pour l'espace $(E, \mathcal{V}_{\Theta})$. ∎

THEOREME 8 :

1°) Les éléments de Θ sont des ouverts de l'espace $(E, \mathcal{V}_{\Theta})$.

2°) Les ouverts de l'espace $(E, \mathcal{V}_{\Theta})$ appartiennent tous à Θ si et seulement si la famille Θ vérifie la proposition suivante :

$$\forall \Theta' \subseteq \Theta, \ \bigcup \Theta' \in \Theta. \tag{7}$$

3°) L'espace $(E, \mathcal{V}_{\Theta})$ est le seul espace mpi-topologique dont Θ soit l'ensemble de tous les ouverts.

Le 1° a été démontré au passage dans la démonstration de (i) au théorème 7.

Démonstration. 2°. Soit O un ouvert de l'espace $(E, \mathcal{V}_{\Theta})$, c'est-à-dire $\forall x \in O$, $O \in \mathcal{V}(x)$, soit encore $\forall x \in O$, $\exists O' \in \Theta$: $x \in O' \subseteq O$. Ainsi on peut recouvrir O par des éléments de Θ qui y soient contenus, et donc $O = \bigcup\{O' \mid O' \in \Theta \,\&\, O' \subseteq O\}$, Alors, si l'on suppose (7), $O \in \Theta$. Inversément si O est la famille des ouverts de l'espace $(E, \mathcal{V}_{\Theta})$, Θ vérifie (7) puisque $\mathcal{V}_{\Theta}$ est une m-topologie.

3° Supposons que Θ soit aussi la famille de tous les ouverts de l'espace mpi-topologique $(E, \mathcal{V})$. Alors (théorème 5) $V \in \mathcal{V}(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\exists O \in \Theta$: $x \in O \,\&\, O \subseteq V$. Mais le second membre de cette équivalence est par définition $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(x)$ et donc $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{O}}$. ∎

Soit maintenant $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Il est clair que $\mathcal{F}$ vérifie la proposition

$$\forall \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}, \bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F} \qquad (8)$$

si et seulement si la famille $\mathcal{O} \underset{\text{déf}}{=} \{\sim F \mid F \in \mathcal{F}\}$ vérifie (7). Par conséquent :

<u>THEOREME 9</u> : $\mathcal{F}$ est la famille des fermés d'un (et d'un seul) espace mpi-topologique si et seulement si $\mathcal{F}$ vérifie la proposition (8).

<u>CONTINUITE.-</u>

Soient E et E' deux espaces general-topologiques et f une application : $E \longrightarrow E'$. Soient $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de l'espace E et $\mathcal{F}$ la famille des fermés. Soient i', a', $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{F}'$ l'intérieur, l'adhérence, les ouverts et les fermés de E'.

<u>THEOREME 10</u> : Si f est continue, alors on a les deux propositions suivantes

$$f^{-1}\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$$

et $$f^{-1}\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}.$$

Démonstration.

1°) Soit $O \in \mathcal{O}'$, on a $f^{-1}i'O \subseteq if^{-1}O$ (1-2(2)) et donc, puisque O est ouvert, $f^{-1}O \subseteq if^{-1}O$.

2°) Soit $F \in \mathcal{F}$, on a de même $f^{-1}F \supseteq f^{-1}a'F \supseteq a\ f^{-1}F$. ∎

<u>THEOREME 11</u> : Si f est ouverte, on a la proposition suivante :

$$f\,\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}',$$

en effet, $fO \subseteq fiO \subseteq i'fO$ si $O \in \mathcal{O}$.

<u>THEOREME 12</u> : si f est fermée, on a la proposition suivante :

$$f\,\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}',$$

en effet, si $F \in \mathcal{F}$, $fF \supseteq faF \supseteq a'fF$.

Supposons maintenant que E et E' soient de plus des espaces mpi-topologiques. Toutes les conditions nécessaires écrites ci-dessus deviennent alors suffisantes.

<u>THEOREME 13</u> : f est continue si et seulement si

$$f^{-1}\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O} \tag{9}$$

et si et seulement si

$$f^{-1}\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}. \tag{10}$$

Démonstration.

1°) Soit $X \subseteq E'$, $i'X$ est ouvert et donc, si l'on suppose (9), $f^{-1}i'X$ est ouvert. Comme il est contenu dans $f^{-1}X$ on a aussi (théorème 6.1°) $f^{-1}i'X \subseteq if^{-1}X$.

2°) Soit $X \subseteq E'$, $f^{-1}a'X$ est un fermé ((10)) contenant $f^{-1}X$ et donc (théorème 6.2°) contenant $af^{-1}X$. ▮

<u>THEOREME 14</u> : f est ouverte si et seulement si

$$f\,\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'. \tag{11}$$

Démonstration. Soit $X \subseteq E$, fiX est ouvert ((11)) et contenu dans fX. Par conséquent (théorème 6.1°) fiX est contenu dans $i'fX$. ▮

<u>THEOREME 15</u> : f est fermée si et seulement si

$$f\,\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'. \tag{12}$$

Démonstration. Soit $X \subseteq E$, faX est un fermé ((12)) contenant fX et donc (théorème 6.2°) contenant $a'fX$. ▮

<u>COMPARAISON DES mpi-TOPOLOGIES.-</u>

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux mpi-topologies sur E et soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ (respectivement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$) les familles d'ouverts (respectivement de fermés) correspondantes.

<u>THEOREME 16</u> : $\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{V}'$ si et seulement si

$$\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}' \tag{13}$$

et si et seulement si

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}' \tag{14}$$

Démonstration. Ce sont des expressions, par le théorème 13, de la continuité de l'identité : $(E,\mathcal{V}) \longrightarrow (E,\mathcal{V}')$. ∎

On remarquera d'ailleurs, par le théorème 10, que ces équivalences sont déjà vérifiées, mais dans un sens seulement, pour des general-topologies quelconques.

RELATIVISATION.-

Soit E un espace mpi-topologique et D une partie de E. L'intersection avec D d'un ouvert de E est simplement l'image inverse de cet ouvert par l'injection d'inclusion et, celle-ci étant continue (théorème 1-1.11), cette intersection est donc un ouvert pour la general-topologie induite (théorème 10). Alors soit $x \in D$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. V contient un ouvert O comprenant le point x et donc $V \cap D$, voisinage de x pour la general-topologie induite, contient autour de x, l'ouvert $O \cap D$, Ainsi la general-topologie induite $\mathcal{V}_D$ est une mpi-topologie (théorème 4 - on savait en effet déjà que $\mathcal{V}_D$ était une mp-topologie).

DEFINITION 2 : Nous appelerons mpi-topologie induite sur D par la mpi-topologie de E la general-topologie induite par cette mpi-topologie.

Soient $\mathcal{O}_D$ et $\mathcal{O}$ ($\mathcal{F}_D$ et $\mathcal{F}$) les familles d'ouverts (de fermés) des espaces $(D, \mathcal{V}_D)$ et E.

THEOREME 17 : $\mathcal{O}_D = \{O \cap D \mid O \in \mathcal{O}\}$ et $\mathcal{F}_D = \{F \cap D \mid F \in \mathcal{F}\}$.

Démonstration. Soit j l'injection canonique d'inclusion. $j^{-1}X = X \cap D$, d'où, par la continuité de j (théorème 1-2.11), on a (théorème 13) $\{O \cap D \mid O \in \mathcal{O}\} \subseteq \mathcal{O}_D$ et $\{F \cap D \mid F \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{F}_D$. Comme d'autre part $\mathcal{V}_D$ est la moins fine des mpi-topologies qui rendent j continue, on a aussi (théorème 16) les inclusions opposées. ∎

THEOREME 18 : D est fermé dans E si et seulement si les fermés dans D sont aussi fermés dans E.

Démonstration. D est fermé si et seulement si j est fermée (théorème 2-3-11) et j est fermée si et seulement si (théorème 15) $\mathcal{F}_D = j\mathcal{F}_D \subseteq \mathcal{F}$. ∎

---

mpi-TOPOLOGIES PROJECTIVE ET PRODUIT.-

Soient E un ensemble, $\{(E_i, \mathcal{V}_i) \mid i \in I\}$ une famille d'espaces mpi-topologiques et les f_i des applications : $E \longrightarrow E_i$. Alors la mp-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective $F\mathcal{V}$ est une mpi-topologie en effet soit $V \in F\mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire $V \supseteq f_k^{-1}V_k$ pour un certain $k \in I$ et un certain $V_k \in \mathcal{V}_k(f_k(x))$. Alors comme $f_k(x) \in O_k \subseteq V_k$ pour un certain ouvert O_k de $(E_k, \mathcal{V}_k)$, on a $x \in f_k^{-1}O_k \subseteq f_k^{-1}V_k$. Par la continuité de f_k, $f_k^{-1}O_k$ est ouvert et on a donc (5), c'est-à-dire (théorème 4) $F\mathcal{V}$ est une mpi-topologie.

DEFINITION 3 : Nous appellerons mpi-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$- projective sur E la mp-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective.

C'est, en tant que mp-topologie projective, la moins fine des mpi-topologies sur E qui rendent continues toutes les f_i.

<u>THEOREME 19</u> : Les ouverts pour la mpi-topologie $(f_i, \mathcal{V}_i)$-projective sont les unions d'images inverses d'ouverts dans les $(E_i, \mathcal{V}_i)$.

Démonstration. Les images inverses d'ouverts sont des ouverts (théorème 13) puisque les f_i sont continues et une union de telles images inverses est donc un ouvert. Inversément soit O un ouvert pour la mpi-topologie projective. On a $\forall x \in O,\ O \in F\mathcal{V}(x)$ ce qui, ainsi qu'on l'a remarqué dans la discussion qui précède la définition 3, suppose $O \supseteq f_k^{-1}\, O_k$ pour un certain k et un certain ouvert O_k de $(E_k, \mathcal{V}_k)$ comprenant le point $f_k(x)$. Ainsi O est recouvert par des $f_k^{-1}\, O_k$ qu'il contient et donc $O = \bigcup \{ f_k^{-1} O_k \mid O_k$ ouvert dans $(E_k, \mathcal{V}_k)$ & $f_k^{-1} O_k \subseteq O \}$. ∎

<u>mpi-TOPOLOGIE ASSOCIEE A UNE general-TOPOLOGIE.-</u>

Soit $\mathcal{V}$ une general-topologie sur l'ensemble E et soit $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de l'espace $(E, \mathcal{V})$.

<u>DEFINITION 4</u> : Nous appellerons mip-topologie associée à la general-topologie $\mathcal{V}$ la mpi-topologie $\tilde{\mathcal{V}}$ définie par

$$V \in \tilde{\mathcal{V}}(x) \underset{\text{déf}}{\iff} \exists\, O \in \mathcal{O} : V \supseteq O \ni x. \qquad (15)$$

Cette définition est aussi celle de $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}$ (voir (6)) et donc (théorème 7) $\tilde{\mathcal{V}}$ est une mpi-topologie.

<u>THEOREME 20</u> : La famille $\tilde{\mathcal{O}}$ des ouverts de l'espace $(E, \tilde{\mathcal{V}})$ est l'ensemble des unions de familles d'ouverts de l'espace $(E, \mathcal{V})$.

Démonstration. On a $\mathcal{O} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ (théorème 8.1°) et donc $\{\bigcup \mathcal{O}' \mid \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}\} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ (théorème 2-3.1.1°). D'autre part on a montré dans la démonstration du 2° du théorème 8 que si $O \in \tilde{\mathcal{O}}$, $O = \bigcup\{O' \mid O' \in \mathcal{O} \,\&\, O' \subseteq O\}$. Ainsi $\{\bigcup \mathcal{O}' \mid \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}\} \supseteq \tilde{\mathcal{O}}$. ∎

$\tilde{\mathcal{V}}$ n'est pas en général comparable à $\mathcal{V}$. Cependant si $\mathcal{V}$ est une m-topologie, $V \supseteq O \ni x$ entraîne $V \in \mathcal{V}(x)$ et donc que $\tilde{\mathcal{V}}$ est moins fine que $\mathcal{V}$.

THEOREME 21 : Si $\mathcal{V}$ est une m-topologie, la mpi-topologie associée à $\mathcal{V}$ est la plus fine des mpi-topologies moins fines que $\mathcal{V}$.

Démonstration. Si $\mathcal{V}'$ est une mpi-topologie moins fine que la m-topologie, on a $\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}'$ d'après la remarque qui suit le théorème 16. Comme d'autre part $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$ on a alors $\mathcal{O}' \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$. ∎

---

mpi-TOPOLOGIE QUOTIENT.-

Soient $(E, \mathcal{V})$ un espace general-topologique, E' un ensemble et f une application : $E \longrightarrow E'$.

THEOREME 22 : Les ouverts pour la general-topologie quotient $\mathcal{V}_f$ sont les parties de E' dont l'image inverse par f est un ouvert de $(E, \mathcal{V})$.

Démonstration. Supposons que O est ouvert pour $\mathcal{V}_f$.
Si $x \in f^{-1}O$, $f(x) \in O$ et donc $O \in \mathcal{V}_f(f(x))$, c'est-à-dire $f^{-1}O \in \mathcal{V}(f^{-1}f(x))$ et en particulier $f^{-1}O \in \mathcal{V}(x)$. Si O n'était pas dans Imf on aurait $f^{-1}O = \emptyset$, toujours ouvert. Inversément, si $f^{-1}O$ est un

ouvert et si $y \in O$, $f^{-1}(y)$ étant contenu dans $f^{-1}O$ est également contenu dans $i\, f^{-1}O$, c'est-à-dire $f^{-1}O \in \mathcal{V}(f^{-1}(y))$, soit encore $O \in \mathcal{V}_f(y)$. ∎

Supposons maintenant que $(E, \mathcal{V})$ soit même un espace mpi-topologique et que f soit une surjection. Il n'est pas sur que la mp-topologie quotient $\mathcal{V}_f$ soit une mpi-topologie car cela supposerait si $V \in \mathcal{V}_f(y)$, qu'il existe un ouvert O tel que $y \in O \subseteq V$ c'est-à-dire que $f^{-1}V \supseteq f^{-1}O \supseteq f^{-1}(y)$. Or, il se peut très bien que $f^{-1}V$ ne contienne pas d'ouvert saturé contenant $f^{-1}(y)$.

<u>DEFINITION 5</u> : Nous appellerons <u>mpi-topologie quotient de</u> $\mathcal{V}$ <u>par</u> f la mpi-topologie $\tilde{\mathcal{V}}_f$ associée à la mp-topologie quotient $\mathcal{V}_f$.

C'est la plus fine des mpi-topologies qui rendent f continue (théorème 20 et corollaire du théorème 2-3.24).

<u>THEOREME 23</u>:

1°) f est compatible avec $\mathcal{V}$ si et seulement si le saturé d'un ouvert est encore un ouvert, c'est-à-dire si et seulement si

$$f^{-1}f\,\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}. \tag{16}$$

2°) f est anticompatible avec $\mathcal{V}$ si et seulement si le saturé d'un fermé est encore un fermé, c'est-à-dire si et seulement si

$$f^{-1}f\,\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}. \tag{17}$$

Démonstration.

1°) Supposons 1-2(20 et soit O un ouvert de $(E,\mathcal{V})$, c'est-à-dire (théorème 1-2-15) $O\in\mathcal{V}(O)$. Alors $f^{-1}fO\in\mathcal{V}(f^{-1}fO)$. Inversément supposons (16) et soit $V\in\mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire $V\supseteq O\ni x$ pour un certain O ouvert. Alors $x\in f^{-1}fO\subseteq f^{-1}fV$ et $f^{-1}fV\in\mathcal{V}(x)$.

2°) Supposons 2-3(11) et soit F un fermé de $(E,\mathcal{V})$, c'est-à-dire $F\supseteq aF$. Alors $f^{-1}fF\supseteq f^{-1}faF$ et donc $f^{-1}fF\supseteq af^{-1}fF$. Inversément supposons (17) et soit $X\subseteq E$. $f^{-1}faX$ est fermé comme ax. D'autre part $f^{-1}faX$ contient $f^{-1}fX$ et donc (théorème 6.2°) contient aussi $af^{-1}fX$. ▮

<u>THEOREME 24</u> : Si f est compatible, alors $\tilde{\mathcal{V}}_f$ est simplement $\mathcal{V}_f$.

Démonstration. Soit $V\in\mathcal{V}_f(y)$, c'est-à-dire $f^{-1}V\in\mathcal{V}(f^{-1}(y))$. On a alors $f^{-1}V\supseteq O\supseteq f^{-1}(y)$ pour un certain ouvert O et donc $V\supseteq fO\ni y$. f étant compatible, $f^{-1}fO$ est ouvert et donc (théorème 22) fO est ouvert dans $(E',\mathcal{V}_f)$. Ainsi $\mathcal{V}_f$ est elle-même une mpi-topologie .▮

4. REMARQUES BIBLIOGRAPHIQUES.-

Les espaces p_0-topologiques apparaissent dans APPERT [1] sous le nom d'espaces topologiques avec comme concept initial la dérivation. On pourrait bien sûr citer Fréchet et Riesz à ce propos. On trouvera, dans APPERT [1] toujours, les espaces mp_0-topologiques sous le nom d'espaces $(\mathcal{V})$ (dus à Fréchet) avec comme second concept initial les voisinages ou plus précisément les systèmes fondamentaux de voisinages. La fonction d'adhérence est introduite par Appert en tant que nouveau concept initial pour les espaces p_0-topologiques dans APPERT [2].

L'axiome (m) relatif à la dérivation est la 2ème condition de Riesz. L'axiome (i) relatif à l'adhérence, dans un espace mp_0-topologique, est la condition α) de Appert sur les espaces $(\mathcal{V})$. La notion d'intérieur que nous avons adoptée est celle qui apparaît dans APPERT [2].

Concernant les espaces general-topologiques et m-topologiques nous n'avons eu connaissance au départ que des résultats de Day sur la convergence en relation avec l'adhérence et les voisinages (voir paragraphe 2-5). Nous avons trouvé ensuite dans APPERT [3] les relations entre intérieur, adhérence, dérivé et voisinage dans les espaces general-topologiques (et p-topologiques pour la dérivation) ainsi qu'une notion de continuité dans ces espaces. Nous allons, sur deux points particuliers de cet article, entrer dans plus de détail.

ENTOURAGES ET VOISINAGES.-

Soit E un ensemble et a une application : $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ qui sera appelée <u>fermeture</u> dans APPERT [3] . Appert appelle <u>intérieur de</u> l'ensemble X l'ensemble $\sim a \sim X$ et <u>entourages de</u> x les ensembles auxquels x est intérieur.

Ces entourages sont donc ce que nous avons appelé les voisinages de l'espace general-topologique dont a est la fonction d'adhérence. Appert appelle alors famille de voisinages de x toute famille $\mathcal{F}$ telle que $x \in aX \iff X \in G\mathcal{F}$.

Nous appellerons <u>A-voisinages</u> de x les éléments de toute famille de voisinages de x au sens de Appert. Il existe une famille $\mathcal{F}$ de A-voisinages pour le point x si et seulement si la famille $\mathcal{E}(x)$ de tous les entourages du point x est antihéréditaire et dans ce cas $\mathcal{E}(x) = F\mathcal{F}$. Une famille de A-voisinages de x correspond donc à ce que nous avons appelé, dans le cas d'un espace m-topologique, un système fondamental de voisinage de x. L'axiome (m) devient chez Appert : pour chaque point x de E, il existe une famille de A-voisinages de x. Appert montre aussi que ceci est équivalent à supposer a monotone.

<u>CONTINUITE ENTRE ESPACES general-TOPOLOGIQUES.-</u>

Appert définit la continuité d'une application $f : E \longrightarrow E'$ à partir des entourages de la manière suivante : quels que soient le point x et l'entourage V' de f(x), il existe un entourage V de x tel que $y \in V \implies f(y) \in V'$. On a ainsi $V \subseteq f^{-1}V'$ et finalement la continuité au sens de Appert devient pour des espaces general-topologiques $(E,\mathcal{V})$ et $(E',\mathcal{V}')$, $\forall x \in E$, $f^{-1}\mathcal{V}(f(x)) \subseteq F\,\mathcal{V}(x)$, soit encore, par le théorème 2-3.6, f est continue : $(E,F\mathcal{V}) \longrightarrow (E',F\mathcal{V}')$. La continuité au sens de Appert est donc la continuité entre espaces m-topologiques associés.

- - - - - - - - -

Ainsi tout le paragraphe 1-1 est couvert par APPERT 3 sauf peut-être en ce qui concerne l'usage explicite des voisinages (ou entourages) comme concept initial. Au contraire, comme nous venons de le voir, notre définition de la continuité paraît nouvelle et nouveau par conséquent tout le paragraphe 1-2 ainsi que le paragraphe 3-1 à partir de la section sur la continuité.

La notion de continuité que nous avons adoptée se confond avec celle de Appert à partir des espaces m-topologiques et elle était bien connue pour les espaces mp_c-topologiques (espaces $(\mathcal{V})$).

Les définitions de general-topologies projective et quotient et les résultats qui s'y rapportent sont nouveaux à notre connaissance. En fait nous n'avons pu retrouver dans la littérature que la définition de la mp_c-topologie quotient et le théorème correspondant à 1-2.16 ainsi que la définition de la mp_c-topologie projective et le théorème correspondant à 1-2.11 dans le cas particulier où l'on dispose d'une seule application f d'un ensemble dans un espace mp_c-topologique (MAMUZIC [2]). Nous n'avons pu consulter MAMUZIC [4] mais on peut déduire du titre que Mamuzic annonce des résultats sur les produits d'espaces $(\mathcal{V})$.

Pour les espaces mp_c-topologiques et les espaces plus particuliers nous renvoyons à SIERPINSKI [2] , APPERT & KY FAN [1] . Citons aussi MAMUZIC [1] et [3] qui sont sur le même sujet, sauf erreur de notre part (nous n'avons pu les consulter).

- - - - - - - - - -

Citons encore ici deux généralisations qui ne peuvent s'intégrer dans la ligne que nous avons suivie.

Abian généralise les ouverts de la topologie en une famille quelconque de sous-ensembles, définit une convergence et définit à partir de celle-ci une notion de continuité. Dans le cas d'un espace topologique, le seul système convergeant vers x serait la base de filtre de tous les ouverts contenant x - sauf erreur de notre part, l'article, très bref, ne donnant que des définitions.

Hammer part d'une application quelconque f : $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ Il y associe après plusieursétapes une notion de dérivation et, de là, une notion de continuité. La théorie qu'il construit garde peu de ressemblance avec la topologie habituelle mais permet cependant de définir, comme cas particulier, la continuité entre espaces mpi-topologiques.

BIBLIOGRAPHIE.-

Smbat ABIAN

[1] "A general definition of convergence, continuity, differentiability and integrability" Math. Ann. 134 (1957) 93-94.

Antoine APPERT

[1] "Propriétés des espaces abstraits les plus généraux " A.S.I. 145 et 146, Paris, 1934.

[2] "Sur quelques notions susceptibles d'êtres prises comme terme primitif dans la théorie des espaces abstraits " Mathematica 11(1935), 229-246.

[3] "Sur l'équivalence de diverses définitions de la continuité dans les espaces topologiques généraux, et sur l'axiomatique de ces espaces". Rend. Circ. mat. Palermo (2) 10 (1961) 333-346.

Antoine APPERT et KY FAN.

[1] "Espaces topologiques intermédiaires " A.S.I. 1121, Paris, 1951.

M. BALAZS, D. BORSAN, M. FRODA-SCHECHTER et P. HAMBURG

[1] "Relations entre parties d'ensembles" Rev. Math. pures et appl.7(1962).

[2] "Operatori în multimi de parti" (Roumain. Résumés russe et français). Acad. R.P. Romine. Stud. cerc.mat. 13 (1962) 113-125.

A.A. BENNET.

[1] "Generalized convergence with binary relations" Amer. Math. Monthly 32(1925) 131-134.

Garrett BIRKHOFF

[1] "A new definition of limit" Bull. Amer.Math. Soc. 41(1935) p. 636 (abstract. n. 355).

[2] "Moore-Smith convergence in general topology" Ann.of Math. (2) 38(1937) 39-56.

Nicolas BOURBAKI

[1] "Structures topologiques". Ch. 2 de A.S.I. 858, Paris, 1940 (2ème édition) A.S.I. 1142, Paris, 1951).

Henri CARTAN

[1] "Théorie des filtres" C.R. Acad. Sci. Paris 205(1937) 595-598.

[2] "Filtres et ultrafiltres" C.R. Acad. Sci. Paris 205(1937) 777-779.

G. CHOQUET

[1] "Convergences". Ann. Univ. Grenoble 23 (1947-1948) 57-112.

Akos CSASZAR.

[1] "Fondements de la topologie générale", Budapest, 1960.

[2] "Foundations of general topology" Pergamon Press, New York, 1963.

Mahlon M. DAY

[1] "Ordered sets and closures". Bull. Amer. Math. Soc. 46(1940) p. 748.

[2] "Convergence, closure and neighborhoods" Duke Math. J. 11 (1944) 181-199.

D. DOICINOV

[1] "A unified theory of topological spaces,proximity spaces and uniform spaces" Soviet Math. 5 (1964) 595-598.

R.M. DUDLEY

[1] "Sequential convergence" Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964) 483-507.

H.R. FISCHER

[1] "Limersräume" Math. Ann. 137(1959) 269-303.

Maurice FRECHET

[1] "Sur quelques points du calcul fonctionnel" Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906) 1-74.

[2] "Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits" Bull. Sci. Math. 42 (1918) 138-156.

[3] "Sur les ensembles abstraits" Ann. Ec. Norm. 38 (1921) 341-385.

[4] "Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale" Paris, 1926, (1928, 1951).

Preston C. HAMMER

[1] "General topology, symmetry and convexity" Trans. Wisconsin Acad. Sci. Arts Letters 44 (1955) 221-225.

Klaus HARBARTH

[1] "Uber die Aquivalenz verschiedener Axiomensysteme für Limesräume" Math. Nachr. 17 (1959) 261-272.

John L. KELLEY

[1] "Convergence in topology" Duke Math. J. 17(1950) 277-283.

[2] "General topology" The University series in higher math., New York, 1955.

[3] "Moore-Smith convergence". Chap. 2 de KELLEY [2] .

H. KENYON et A.P. MORSE.

[1] "Runs" Pacific J. Math. 8 (1958) 811-824.

Casimir KURATOWSKI.

[1] "Topologie I " Monografje mat. 3, Warszawa, 1933 (1948, 1952, 1958).

Zlatko P. MAMUZIC.

[1] Uvod u opstu topologiju. Prvi deo" Matematicka Bibl. 17, Beogradu, 1960.

[2] "Quelques remarques sur les applications continues des espaces de voisinages" Publ.Inst. Math. Serbie 3 (1963) 131-137.

[3] "Introduction to general topology", Groningen, 1963.

[4] "Neighborhood product and quotient spaces. Preliminary report" Amer. Math. Soc. Not. 11 (1964) 115.

A. MONTEIRO

[1] "Sur les ensembles de fermés". Portug. Math. 2 (1941) 581

E. H. MOORE et H.L. SMITH

[1] "A general theory of limits". Amer.J.Math. 44 (1922) 102-121.

Hugo Baptista RIBEIRO

[1] "Une extension de la notion de convergence". Portug. Math. 2 (1941) 153-161.

F. RIESZ

[1] "Stetigkeitsbegriff und abstrackte Mengenlehre" Atti del 4 Congr. Intern. Mat. Roma 2 (1910).

Vera SEDIVA

[1] "Some examples of topological spaces in which the axiom F does not hold" (Czech. Russian and English summaries). Casopis Pest. Mat. 84 (1959) 461-466.

W. SIERPINSKI

[1] "La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits" Math. Ann. 97 (1926) 321-337.

[2] "General topology" Math. expositions 7, Toronto, 1952.

H.L. SMITH

[1] "A general theory of limits" Nat. Math. Mag. 12 (1938) 371-379.

J.W. TUKEY

[1] "Convergence and uniformity in topology" Ann. of Math. Studies 2 (1940).

Paul URYSOHN

[1] "Sur les classes ($\mathcal{L}$) de M. Fréchet" Ens. Math. 25 (1926) 77-83.
