LE CALCUL DIFFERENTIEL
DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par

Dominique Meeùs

Université catholique de Louvain

1970

Bibliothèque des
Sciences Exactes

Dissertation présentée pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE 0. LES ESPACES.

§ 1. Espaces à bornés convexes. Espaces à bornés convexes. Comparaison. Structures initiales. Structures finales. Réunions d'espaces semi-normés. 7

§ 2. Espaces pseudo-topologiques localement convexes. Pseudo-topologies localement convexes (continuité). Comparaison. Structures initiales. Structures finales. 11

§ 3. La convergence de Mackey d'un espace à bornés convexes. La convergence de Mackey d'un e.b.c. Les bornés d'un e.p.c. Les e.b.c. comme e.p.c. particuliers. 14

§ 4. Espaces à bornés convexes et espaces localement convexes. Deux réflexions de la catégorie des e.p.c. Le foncteur β . Le foncteur τ . Espaces à bornés convexes et espaces localement convexes. 17

§ 5. Séparation. 22

Note. 24

PREMIERE PARTIE.

LE CALCUL INFINITESIMAL DANS LES ESPACES A BORNES CONVEXES.

CHAPITRE 1. LES FONCTIONS CONTINUES ENTRE ESPACES A BORNES CONVEXES.

§ 1. Fonctions continues et ensembles équicontinus de fonctions. Continuité en un point. Equicontinuité en un point. Caractère local de la continuité et de l'équicontinuité. Continuité uniforme sur les bornés. Equicontinuité uniforme sur les bornés. 26

§ 2. Espaces d'applications linéaires et multilinéaires. Applications linéaires. Décomposition en applications partielles. Applications multilinéaires. 35

CHAPITRE 2. LA DERIVEE DANS LES ESPACES A BORNES CONVEXES.

§ 1. La dérivée en un point. Les infiniment petits. La dérivée en un point. Caractère local de la dérivée. Les O(h). Règles de dérivation. 39

§ 2. La fonction dérivée. Dérivées successives. Composition de fonctions dérivables. Dérivées partielles. 48

Note sur la première partie. 53

DEUXIEME PARTIE.

LE CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

CHAPITRE 3. LA DERIVEE DES FONCTIONS ENTRE ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

§ 1. Les notions de dérivée. Les infiniment petits. Les dérivées. Propriétés de la dérivabilité (F), (S), (β), (G_b) et (G_p). Composition des fonctions de classe C^1. Dérivées partielles. 55

§ 2. Relations entre la dérivabilité (β) et les topologies. Les infiniment petits (β) et les topologies. La continuité des fonctions dérivables (β) . 63

CHAPITRE 4. LES CONSEQUENCES DU THEOREME DE LA MOYENNE.

§ 1. Le théorème de la moyenne et ses premières applications. Théorème de la moyenne. Primitives. Continuité uniforme sur les bornés des fonctions dérivables. Composition des fonctions continuement dérivables. 67

§ 2. Fonctions d'une variable réelle. Fonctions d'une variable réelle qui "ne sont pas vraiment" à valeurs dans les e.l.c. généraux. Continuité et dérivabilité de l'intégrale. Règle d'intégration par parties. Intégration par substitution. Intégration le long d'une courbe d'une fonction de variable vectorielle. Changement de variable. Intégrale et dérivée (G_p) ou (G_b). 72

§ 3. Dérivées d'ordre supérieur. Dérivations successives. Symétrie de la dérivée seconde en un point. Infiniment petits d'ordre supérieur. Fonctions qui ont un infiniment petit pour dérivée. Polynômes. Théorème de Taylor. Reste de la formule de Taylor sous forme d'intégrale. Réciproque du théorème de Taylor. 82

CHAPITRE 5. LE PROBLEME DES FONCTIONS IMPLICITES.

§ 1. Théorèmes d'existence. Points fixes. Fonctions implicites. 89

§ 2. Dérivabilité de la solution. 94

EXEMPLES. 98

APPENDICES. 103

1. Un théorème sur la continuité uniforme. 104

2. Les conditions de convergence de Mackey. La condition pour les suites et la condition pour les filtres bornés. La condition pour les filtres à base dénombrable. Disques métrisables. 105

3. Bornivores. Bornivores. Bornivores et bornivores convexes. 108

4. Le théorème de complétion de Cauchy. 110

5. Les espaces de Silva. 111

6. Calcul intégral. Intégration des fonctions en escalier. Intégration des limites uniformes de fonctions en escalier. Caractérisation des limites uniformes de fonctions en escalier. Fonctions qui sont en fait à valeurs dans des espaces normés. 113

7. Réciproque du théorème de Taylor dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle. 118

BIBLIOGRAPHIE. 121

INTRODUCTION.

La dérivée "au sens de Fréchet" des fonctions entre espaces normés est maintenant une notion classique. Cette dérivée jouit des principales propriétés élémentaires de la dérivée des fonctions réelles d'une variable réelle et de quelques autres moins élémentaires.

Dans le cas des espaces non normés, la situation est moins favorable. Parmi les propriétés de la dérivée, je distinguerai les "propriétés de base", les propriétés élémentaires liées à la définition même, telle, par exemple, la règle de dérivation d'une fonction de fonction; et les "résultats fondamentaux", les grands théorèmes de la moyenne, de Taylor, des fonctions implicites.

Les problèmes les plus importants apparaissent dès le niveau de ce que j'ai appelé "propriétés de base", si l'on admet comme telles les propriétés que le composé de deux fonctions est de classe C^1, ou deux fois dérivable avec celles-ci. La démonstration classique utilise la continuité, ou la différentiabilité, de l'application canonique de composition :

$$L(E;F) \times L(F;G) \to L(E;G)$$

sur les espaces d'opérateurs linéaires continus entre les espaces normés E, F et G. Pour des espaces localement convexes, on ne peut pas donner de définition générale de topologie localement convexe sur les espaces d'opérateurs linéaires continus qui rende cette application continue et telle que l'espace L(R;E) soit isomorphe à E (voir Keller, "Über Probleme").

De même l'isomorphisme entre L(E;L(F;G)) et l'espace L(E,F;G) des applications bilinéaires continues, isomorphisme dont on dispose dans le cas des espaces normés, n'est plus assuré pour les espaces localement convexes généraux, ce qui complique le traitement des dérivées d'ordre supérieur.

Ainsi l'usage même de la structure d'espace localement convexe, avant tout définition de dérivée, compromet en partie le développement d'un calcul différentiel.

De là vient que la plupart des auteurs qui se sont attaqués au calcul différentiel dans les espaces non normés ont fait appel à des structures autres que topologiques. C'est le cas de Frölicher et Bucher, Bastiani, Binz, Keller et cetera, d'une part; Jose Sebastião e Silva d'autre part.

Le point de vue des auteurs du premier groupe est explicité par Frölicher et Bucher, Bastiani et surtout Keller, dans"Über Probleme". Ils procèdent en munissant les espaces L(E;F) d'une structure plus générale, pour laquelle l'application canonique de composition soit continue. Et si l'on veut dériver à son tour la fonction dérivée qui est à valeurs dans un tel espace L(E;F), il faut faire toute la théorie de la dérivée pour la structure plus générale, obtenant ainsi un calcul différentiel pour les fonctions entre espaces localement convexes comme cas particulier.

Jose Sebastião Silva, dans son "Calcul", base la définition de dérivée d'une fonction entre espaces localement convexes sur les bornés de ces espaces. Cela revient en fait, comme il le fait remarquer ultérieurement dans "Espaces à bornés et fonction différentiable", à utiliser la structure à bornés convexes associée à ces espaces. Si E et F sont des espaces localement convexes, on peut définir un espace à bornés convexes L(E;F) adapté à notre problème de composition.

La relation de l'espace localement convexe à son espace à bornés convexes associé est fonctorielle mais ne va plus du particulier au général, comme c'était le cas pour les structures pseudo-topologiques utilisées par les auteurs du premier groupe. Nous verrons comment les espaces à bornés convexes peuvent être, au même titre que les espaces localement convexes, considérés comme des cas particuliers d'espaces pseudo-topologiques au sens du "Calculus" de Frölicher et Bucher. De plus, la définition de Silva pour la dérivée d'une fonction entre espaces localement convexes apparaît alors comme la particularisation de la définition de Frölicher et Bucher, non pas aux espaces localement

convexes eux-mêmes, mais bien à leurs espaces à bornés convexes associés.

Il serait malheureux de faire un choix définitif d'une notion de dérivée du point de vue de ces "propriétés de base" et donc, essentiellement, selon les critères théoriques énoncés par Keller dans "Über Probleme". En effet, telle ou telle notion pour laquelle le composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ne serait plus nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ peut cependant être intéressante pour l'étude des fonctions, considérées isolément, du second point de vue.

Ce second point de vue est celui de ce que j'ai appelé les "résultats fondamentaux". Le théorème de la moyenne pour les fonctions d'une variable réelle sur un intervalle fermé et borné vaut pour toutes les notions considérées. On aurait pu craindre que, dans les conséquences du théorème de la moyenne, le défaut de certaines "propriétés de base" se fasse sentir puisque l'on appliquera le théorème à des fonctions composées de la forme $g(t)=f(a+th)$ où t est un nombre réel; mais, pour ce composé simple, la difficulté n'est qu'apparente. Les premières conséquences du théorème de la moyenne restent donc indépendantes de la notion choisie.

Assez curieusement c'est la question de la dérivation d'un polynôme qui départage les différentes notions de dérivée. N'ayant pu dériver un polynôme "au sens de Fréchet" j'ai dû abandonner, pour cette notion, la démonstration du théorème de Taylor. Je ne sais pas non plus si le théorème est faux pour cette notion mais il reste que la notion de dérivée la plus naturelle à première vue, la plus proche de la dérivée de Fréchet pour les espaces normés, apparaît comme présentant des inconvénients sérieux. D'une autre notion de dérivée, nommée d'après Gâteaux, je ne sais pas si elle vérifie la règle de dérivation d'une fonction de fonction. Force est de constater que ces illustres mathématiciens voient leurs noms associés aux deux définitions les plus mauvaises. On peut en tirer la leçon que, contrairement au cas, sans danger, des théorèmes, il faut attendre l'épreuve du feu avant que de lier un nom propre à la généralisation d'une définition.

Le théorème des fonctions implicites, dans son énoncé classique, est également faux pour toutes les notions de dérivées. Cela résulte de contre-exemples qui ont la particularité de préexister à toute définition de dérivée. Ce point sera discuté avec plus de détails en son lieu.

* * *

La dissertation s'organise autour du paragraphe premier du chapitre 3. On y décrit et compare quelques unes des notions de dérivée que l'on trouve dans la littérature. Je fais peu de place aux définitions fondées sur des structures pseudo-topologiques. Cette direction de recherche culmine dans l'excellent "Calculus" de Frölicher et Bucher. La définition de Silva est basée sur la structure d'espace à bornés convexes et son applications demandait quelques préliminaires. Les chapitres 1 et 2, formant la Première Partie, traitent des fonctions continues entre espaces à bornés convexes et de la dérivée de telles fonctions y compris les "propriétés de base". Avant cela un chapitre 0 a précisé les positions respectives des différentes structures considérées et décrit des foncteurs les reliant. Ainsi ce paragraphe 1 du chapitre 3 marque le passage des préliminaires à l'objet lui-même de ce travail le calcul différentiel dans les espaces localement convexe. C'est la Deuxième Partie (chapitres 3,4 et 5) où l'on trouvera la théorème de la moyenne et ses applications, le théorème de Taylor, et des résultats concernant le problème des fonctions implicites.

Les quelques exemples qui servent d'illustration ou de contre-exemple sont regroupés. Enfin des Appendices contiennent des renseignements sur des notions ou des résultats peu connus ou difficiles à trouver dans la littérature.

* * *

Le texte principal est divisé en chapitres, paragraphes et numéros, les appendices en numéros. Les références se font aux numéros par trois nombres (A et deux nombres pour les appendices) qui ont un sens évident.

On a vu comment les chapitres sont regroupés dans deux Parties.

Des titres, indépendants de la division en numéros, entrecoupent le texte pour fournir des points de repère à la lecture.

* * *

Quelques conventions seront utiles. La seconde et la troisième sont importantes.

1° J'ai écrit filtre abusivement à un certain nombre d'endroits où il aurait fallu, au choix, base de filtre ou filtre engendré par - . De plus certains de ces "filtres" pourraient admettre l'ensemble vide comme élément. On conviendra que ces "filtres"-là convergent vers tous les points de l'espace même si l'on a dit d'autre part que les limites étaient uniques.

2° J'appelle <u>fonction</u> d'un espace dans un autre une application d'une partie du premier dans le second. Une expression telle que :

la fonction f est continue : $E \to F$,

indique seulement que la continuité est entendue par rapport aux structures des espaces E et F; elle ne signifie en aucune façon que f est définie sur E tout entier.

3° La dérivée en un point, pour les notions considérées, n'est unique que si les limites sont uniques. Pour pouvoir parler de <u>la</u> dérivée sans répéter chaque fois des hypothèses de séparation, je propose la convention qu'à partir de la première définition de dérivée au chapitre 2 les espaces donnés sont supposés vérifier la condition que les limites sont uniques. Cette convention sera rappelée en lieu utile.

Pour certains résultats élémentaires, la convention n'a pas de conséquence. D'autres résultats pourraient être faux sans quelque hypothèse de séparation, et cela doit être gardé présent à l'esprit puisqu'aucune hypothèse de ce genre n'apparaîtra dans l'énoncé.

En outre quelques notations sont fixées. Ainsi R et $\mathcal{V}$ désigneront toujours, respectivement, la droite réelle et le filtre de ses voisinages de zéro.

* * *

Il me faut remercier d'abord le Professeur Lavendhomme qui a attiré mon attention sur le problème du calcul différentiel en dimension infinie et qui m'a suivi tout au long de mon travail. C'est au Professeur Ballieu que je dois ma formation à l'analyse et à Monsieur Jacques Boël mes connaissances sur les espaces localement convexes.

D.M.

Décembre 1969.

CHAPITRE 0. LES ESPACES.

§ 1. ESPACES A BORNES CONVEXES.

ESPACES A BORNES CONVEXES.

1. On appelle espace à bornés convexes (e.b.c.) un espace vectoriel E (on ne considérera que les espaces réels) muni d'un recouvrement $\mathcal{B}$, dont les éléments sont dits bornés, vérifiant les axiomes suivants :

(i) $\mathcal{B}$ est héréditaire : $B \subset B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{B}$;

(ii) $\mathcal{B}$ est filtrant croissant : B et $B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B \cup B' \in \mathcal{B}$;

(iii) B et $B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B + B' \in \mathcal{B}$;

(iv) $\left.\begin{array}{l} B \in \mathcal{B} \\ D \text{ borné dans le corps des scalaires} \end{array}\right\} \Rightarrow DB \in \mathcal{B}$;

(v) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathrm{conv}(B) \in \mathcal{B}$

Conv(A) désigne l'enveloppe convexe de A .

Ces axiomes sont surabondants : $B + B'$ est contenu dans $2\,\mathrm{conv}(B \cup B')$ tandis que $B \cup B'$ est contenu dans $[-1,1]\,(B+B')$. Ce qui permet de se passer soit de (ii), soit de (iii), en présence des autres axiomes.

Pour commenter les axiomes (iii) et (iv), il nous manque la définition de produit (0.1.4.) et celle d'application continue (1.1.1). Dans le cas des applications linéaires et multilinéaires la continuité se ramène au caractère borné (1.1.3), entendant par là que l'image de bornés est bornée. On voit alors que (iii) et (iv) assurent que les opérations sont bornées.

2. Les bornés ne sont pas tous convexes. Cependant ceux qui le sont forment une cobase ou un système fondamental de bornés en ce sens que tout borné est contenu dans un borné convexe - c'est, par (i), une reformulation de (v). Ainsi les bornés convexes engendrent la structure, d'où l'appel-

lation d'espace à bornés convexes.

En prenant pour D la boule unité du corps des scalaires, on voit, par (iv), que l'enveloppe équilibrée d'un borné est encore borné. Donc, tenant compte de ce qui vient d'être dit sur les convexes, les disques (c'est-à-dire les ensembles convexes et équilibrés) bornés forment une cobase de la structure de E .

COMPARAISON.

3. Introduisons encore ici la comparaison des structures. Ayant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux recouvrements de E satisfaisant aux axiomes (i) à (v), on dira que $\mathcal{B}$ est <u>plus fin que</u> $\mathcal{B}'$ si $\mathcal{B}$ est contenu dans $\mathcal{B}'$. C'est dire aussi que l'application identique sur E est bornée : $(E,\mathcal{B}) \to (E,\mathcal{B}')$.

STRUCTURES INITIALES.

4. Soient E_i $(i \in I)$ des espaces à bornés convexes, E un espace vectoriel et f_i $(i \in I)$ des applications linéaires de E dans E_i . La structure <u>initiale</u> d'espace à bornés convexes sur E relative aux applications f_i est la moins fine de celles qui rendent les applications f_i bornées. Pour obtenir la moins fine il faut y mettre le plus de bornés possible. Or si l'on prend tous les ensembles dont l'image par chaque f_i est un borné de E_i on obtient bien une structure à bornés convexes. On ne peut en prendre plus sans que les f_i cessent d'être bornées.

Si $\mathcal{B}_i$ est le recouvrement qui constitue la structure de E_i ,

$$\mathcal{B} = \{B \mid \forall i \in I,\ f_i(B) \in \mathcal{B}_i\}$$

est le recouvrement qui constitue la structure initiale correspondante sur E .

5. En particulier, soit E un e.b.c. Les produits $D \times B$ où B est un borné de E et D un borné de R forment une cobase pour l'espace à bornés convexes produit $R \times E$. La multiplication : $R \times E \longrightarrow E$ est bornée : elle transforme bien le borné $D \times B$ du produit en l'ensemble DB qui est borné en vertu de l'axiome (iv)

STRUCTURES FINALES.

6. Soient $E_i (i \in I)$ des espaces à bornés convexes, E un espace vectoriel et f_i $(i \in I)$ des applications linéaires de E_i dans E. La structure <u>finale</u> d'espace à bornés convexes sur E relative aux applications f_i est la plus fine de celles qui rendent les applications f_i bornées. Pour obtenir la plus fine il faut y mettre le moins de bornés possible. Cependant, il faut prendre, pour le moins, les images directes par f_i des bornés de E_i, et ce pour chaque $i \in I$. Cela ne fait pas encore nécessairement une structure d'espaces à bornés convexes, d'abord parce que ce n'est même pas nécessairement un recouvrement. Ajoutons-y les parties finies de E et leurs enveloppes convexes équilibrées. Faisons les sommes finies de tous les bornés concédés jusqu'à présent et nous aurons alors une structure à bornés convexes (parce que (iv) est vérifié et que (iv) et (iii) entraînent (ii)). Il est inutile d'être plus explicite parce que tous les cas de structures finales qui se présenteront dans la suite n'offrent pas ces difficultés.

REUNIONS D'ESPACES SEMI-NORMES.

7. Les bornés, au sens habituel, d'un espace localement convexe forment un recouvrement vérifiant les axiomes (i) à (v), c'est un fait connu que nous avons déjà utilisé implicitement en ce qui concerne le corps des scalaires.

En particulier, les espaces semi-normés peuvent être considérés comme espaces à bornés convexes et l'on peut identifier ces structures puisque les bornés d'un espace semi-normé déterminent entièrement la structure topologique. Nous reviendrons au § 4. sur le cas des e.l.c. généraux.

8. Soient E un espace vectoriel et B un disque de E . Notons E_B l'espace engendré par B . On a :

$$E_B = \cup \{\lambda B \mid \lambda > 0\}.$$

Soit $x \rightsquigarrow \|x\|_B$ la jauge de B ,

$$\|x\|_B = \inf\{\lambda \mid \frac{x}{\lambda} \in B, \lambda > 0\} \quad .$$

Sur E, $\|x\|_B$ peut prendre des valeurs infinies mais sur E_B c'est une semi-norme. Dans la suite E_B désignera l'espace semi-normé ainsi défini et non plus seulement l'espace vectoriel sous-jacent. On a, en outre,

$$\check{B} = \{x \mid \|x\|_B < 1\} \subseteq B \subseteq \hat{B} = \{x \mid \|x\|_B \leq 1\}$$

et $$E_{\check{B}} = E_B = E_{\hat{B}}$$

isométriquement.

9. Soient maintenant E un espace à bornés convexes et $\mathcal{B}$ une cobase formée de disques. La structure de E est alors la structure finale correspondant aux injections canoniques : $E_B \to E$ ($B \in \mathcal{B}$). En effet les bornés de E sont exactement tous les bornés de tous ces E_B. En particulier, avec un disque B, les disques $\check{B}$ et $\hat{B}$ sont bornés dans E et, avec la cobase $\mathcal{B}$, les ensembles $\check{\mathcal{B}} = \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ et $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{B} \mid B \in \mathcal{B}\}$ sont des cobases de la structure de E. Ainsi tout e.b.c. est union filtrante croissante d'espaces du type E_B, et, de plus, on peut supposer que dans chacun de ces E_B, B est la boule ouverte, ou qu'elle est la boule fermée.

Inversément, toute union filtrante croissante d'espaces semi-normés est un espace à bornés. On identifiera donc la structure d'"union filtrante croissante d'espaces semi-normés" et la structure d'espace à bornés convexes. Ceci est à rapprocher du fait connu, dual en un certain sens, que tout espace localement convexe peut être obtenu comme structure initiale d'espaces semi-normés (Kelley et Namioka, 6.4).

§ 2. ESPACES PSEUDO-TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES.

PSEUDO-TOPOLOGIES LOCALEMENT CONVEXES.

1. On appelle espace pseudo-topologique localement convexe un espace vectoriel E, réel ou complexe, muni d'une relation binaire entre filtres et points, dite convergence, vérifiant les axiomes suivants :

(i) $\mathcal{F} \to 0$ et $\mathcal{G}$ plus fin que $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{G} \to 0$;

(ii) $\mathcal{F} \to 0$ et $\mathcal{G} \to 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \to 0$;

(iii.a) $\mathcal{F} \to x \iff \mathcal{F} - x \to 0$;

(iii.b) $\mathcal{F} \to 0$ et $\mathcal{G} \to 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F} + \mathcal{G} \to 0$;

(iv.a) $\mathcal{F} \to 0$ $\Rightarrow$ $\exists \mathcal{G}$ moins fin que $\mathcal{F}$: $\mathcal{G} = \mathcal{V}\mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \to 0$;

(iv.b) $\mathcal{F} \to 0$ $\Rightarrow \lambda\mathcal{F} \to 0$ (λ scalaire)

(iv.c) $\mathcal{V}_x \to 0$ ($x \in E$) ;

(v) $\mathcal{F} \to 0 \Rightarrow \mathrm{conv}(\mathcal{F}) \to 0$.

Dans les axiomes, $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ est (le filtre engendré par) $\{F \cup G / F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$ de même $\mathcal{V}\mathcal{G}$ est $\{ VG / G \in \mathcal{G}$, V voisinage de 0 dans les scalaires $\}$, etc....

Il est possible de donner un système d'axiomes moins abondant (voir Frölicher & Bucher, "Calculus", 2.4). Ces axiomes-ci sont relativement simples à vérifier dans la pratique.

CONTINUITE.

2. Une fonction f entre deux tels espaces est dite continue lorsqu'elle transporte la relation de convergence des filtres :

$$\mathcal{F} \to x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x) .$$

Les axiomes (iii) et (iv) entraînent la continuité des opérations. Cependant l'axiome (iv) n'est pas en général équivalent à la continuité de la multiplication scalaire. Frölicher et Bucher adoptent, à la place de (iv.a), un axiome plus faible (voir note au bas de la page 19 de leur "Calculus") tandis

que (iv.a) apparaît comme une propriété spéciale ("Calculus" 2.6). De plus leurs espaces ne sont pas, au départ, supposés localement convexes (axiome (v))

3. Les e.b.c. sont des espaces pseudo-topologiques localement convexes.

COMPARAISON.

4. Deux pseudo-topologies se comparent par la continuité de l'application identique. Explicitement : la convergence dans la structure la plus fine implique la convergence dans la structure la moins fine.

STRUCTURES INITIALES.

5. Soient E_i ($i \in I$) des espaces pseudo-topologiques localement convexes, E un espace vectoriel et les f_i des applications linéaires de E dans E_i. La pseudo-topologie localement convexe <u>initiale</u> sur E relative aux applications f_i est la moins fine de celles qui rendent les applications f_i continues. On cherche donc à donner à la relation de convergence le plus grand graphe possible. Or si l'on admet que :

$$\xi \to x \quad \text{dès que} \quad \forall i \in I,\ f_i(\xi) \to f_i(x)$$

on obtient une pseudo-topologie localement convexe. Si l'on permet à d'autres filtres de converger on perd la continuité des f_i.

STRUCTURES FINALES.

6. Quant aux structures finales, nous nous contenterons de décrire la structure finale d'une union filtrante croissante d'espaces semi-normés.

Soient $(E_i/i \in I)$ une famille filtrante croissante d'espaces semi-normés (pour l'ordre : E_i est un sous-espace vectoriel de E_j et l'injection canonique: $E_i \to E_j$ est continue), et E leur union vectorielle. La pseudo-topologie localement convexe <u>finale</u> sur E relative aux injections canoniques est la

plus fine de celles qui rendent ces injections continues. Si $\mathcal{F}$ tend vers 0 dans E_i pour un certain i, il faudra que $\mathcal{F}$ tende vers 0 dans E .
Admettons que :

$$\mathcal{F} \to 0 \text{ dans } E \iff$$
$$\mathcal{F} \text{ a une base } \mathcal{F}_i \to 0 \text{ dans un certain } E_i$$

et utilisons (iii,a) pour définir la convergence en d'autres points :

$$\mathcal{F} \to x \text{ dans } E \iff \mathcal{F} - x \to 0 \text{ dans } E .$$

Ceci définit une pseudo-topologie localement convexe sur E, ce qui se vérifie aisément. Ainsi, par exemple, supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ tendent vers 0 dans E, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est "porté" par un E_i et y converge vers 0; de même pour $\mathcal{G}$ et un certain E_j. Il existe un E_k dans lequel E_i et E_j s'injectent continûment. Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont tous deux "portés" par ce même E_k et y tendent vers 0. Dans E_k on a que $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ tend vers 0 par (iii,b) donc aussi dans E par définition.

Ce qui est réellement simplificateur dans ce cas particulier, c'est qu'il s'agit d'une limite filtrante. Si cela n'était pas le cas il faudrait ajouter que les $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ ($\mathcal{F} \to 0$, $\mathcal{G} \to 0$) convergent, etc. Nous n'aurons pas besoin du cas général que le lecteur intéressé débrouillerait lui-même sans peine.

§ 3. LA CONVERGENCE DE MACKEY D'UN ESPACE A BORNES CONVEXES.

LA CONVERGENCE DE MACKEY D'UN E.B.C.

1. Cette convergence se définit à partir des bornés d'un espace à bornés convexes de la même manière qu'on le fait habituellement (Grothendieck, "E.V.T p.148, et "(F) & (DF)"), dans les espaces localement convexes, mais en l'étendant à tous les filtres.

Soit E un espace à bornés convexes. On appellera convergence de Mackey la relation définie par

$$\mathcal{F} \to 0 \iff \exists \text{ disque borné } B \text{ tel que } \mathcal{F} \text{ soit plus fin que } \{\varepsilon B \mid \varepsilon > 0$$

$$\text{et } \mathcal{F} \to x \iff \mathcal{F}-x \to 0 \quad .$$

Si l'on considère E en tant qu'union d'espaces semi-normés, on voit que la convergence de Mackey coïncide avec la pseudo-topologie localement convexe finale associée aux injections canoniques. C'est donc une pseudo-topologie localement convexe.

LES BORNES D'UN E.P.C.

2. Dans un espace localement convexe un disque B est borné si tout voisinage de 0 en contient un multiple, ce qui revient à dire que $\{\varepsilon B \mid \varepsilon > 0\}$ tend vers 0 dans la topologie de cet espace. Retenons cette caractérisation à partir de la seule convergence.

Soit E un espace pseudo-topologique localement convexe. On dira qu'un ensemble B est borné si B tend vers 0 . Ces bornés forment une structure d'espace à bornés convexes pour E : c'est un recouvrement par 0.2.1 (iv.c) et l'axiome (iv) de 0.1.1. résulte trivialement de la définition. Pour le reste les axiomes (i), (iii), (iv) de 0.1.1 résultent des axiomes (i), (i) et (iii,b (v) de (0.2.1., respectivement.

LES E.B.C. COMME E.P.C. PARTICULIERS.

3. Soit E un espace pseudo-topologique localement convexe. Ses bornés en font aussi un espace à bornés convexes. La convergence de Mackey associée à ces bornés est, a priori, plus fine que la pseudo-topologie donnée au départ. (En effet $\mathcal{F} \to 0$ pour la convergence de Mackey de E si $\mathcal{F}$ est plus fin qu'un ΓB où B est un disque borné, ce qui, par définition, suppose que $\Gamma B \to 0$ pour la pseudo-topologie donnée. Alors, par l'axiome (i) de 0.2.1 $\mathcal{F} \to 0$ pour la pseudo-topologie).

Disons qu'un filtre est <u>borné</u> dans un espace pseudo-topologique localement convexe, s'il comprend un ensemble borné. Disons qu'un espace pseudo-topologique localement convexe est <u>localement borné</u> lorsque tout filtre tendant vers 0 est borné. Dans ce cas il y a identité entre la convergence de Mackey et la convergence pseudo-topologique donnée. (En effet soit $\mathcal{F} \to 0$. Il existe, par (iv.a) de 0.2.1., un $\mathcal{G}$ moins fin tel que $\Gamma\mathcal{G} = \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \to 0$. Soit B un borné appartenant à $\mathcal{G}$. $\mathcal{F}$, plus fin que $\Gamma\mathcal{G} = \mathcal{G}$, est alors plus fin que ΓB , donc converge au sens de Mackey).

La condition étant, par ailleurs, évidemment nécessaire, on peut écrire :

la convergence de Mackey d'un espace pseudo-topologique localement convexe coïncide avec la convergence donnée si et seulement si l'espace est localement borné.

Soit E un espace à bornés convexes. La convergence de Mackey en fait un espace pseudo-topologique localement convexe dans lequel on définit encore des bornés. Ceux-ci sont exactement les bornés donnés au départ. Cela résulte immédiatement des définitions. Cette pseudo-topologie est localement bornée.

De cette manière on peut considérer les espaces à bornés convexes comme des espaces pseudo-topologiques localement convexes particuliers, à savoir ceux qui sont localement bornés. Dans la suite il en sera entendu ainsi et les espaces à bornés convexes seront déterminés indifféremment par leur convergence ou par leurs bornés.

Il importe de souligner que les espaces "localement bornés" qui interviennent dans l'article de Bucker sur la différentiabilité de la composition ne sont généralement pas des espaces à bornés convexes du fait de la différence,déjà signalée plus haut (0.2.2), quant à l'axiome (iv.a) de 0.2.1.

§ 4. ESPACES A BORNES CONVEXES ET ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

DEUX REFLEXIONS DE LA CATEGORIE DES E.P.C.

1. Appelons EPC la catégorie des espaces pseudo-topologiques localement convexes et des applications linéaires continues. Appelons EBC la catégorie des espaces à bornés convexes et des applications linéaires bornées. Les espaces à bornés convexes ont été reconnus comme des espaces pseudo-topologiques localement convexes particuliers. On peut vérifier que les applications linéaires continues entre e.b.c. sont précisément les applications linéaires bornées. EBC est donc une sous-catégorie pleine de EPC.

LE FONCTEUR β .

2. On a défini les bornés d'un espace pseudo-topologiques localement convexe lui associant ainsi un espace à bornés convexes avec même espace vectoriel sous-jacent. Cette application, disons β , des objets de EPC sur les objets de EBC est étendue, en un foncteur en associant à chaque application linéaire continue: $f : E \to F$ entre espaces pseudo-topologiques localement convexes la même application linéaire $\beta f = f$ entre les espaces vectoriels sous-jacents. Cette application est bien un morphisme : $\beta E \to \beta F$. (En effet soit B un borné de E. Comme f est continue, de $\lambda B \to 0$, on tire que $f(\lambda B) \to 0$ dans F . Or $f(\lambda B) = \lambda f(B)$ du fait de la linéarité. Ainsi f(B) est un borné de F).

3. A priori βE est plus fin que E . C'est précisément le moins fin des espaces pseudo-topologiques localement convexes localement bornés plus fins que E . Ces espaces sont identiques si et seulement si E est localement borné (0.3.3). De plus, toute application linéaire continue f d'un espace à bornés convexes D dans E se factorise à travers βE .

$$\begin{tikzcd} & \beta E \arrow[dr, "id"] & \\ D \arrow[ur, "\beta f"] \arrow[rr, "f"'] & & E \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, le foncteur β : EPC $\to$ EBC est adjoint à droite à l'injection de EBC dans EPC : $L(D,E) = L(D,\beta E)$. Si f est continue : $D \to \beta E$ elle est continue : $D \to E$. Inversément on a vu pour définir β que $L(\beta D,\beta E) \cong L(D,E)$. Or dans le cas qui nous occupe $\beta D = D$. On dit encore que β est une réflexion ou que EBC est une sous-catégorie coréflective (par le foncteur β) de la catégorie EPC.

4. Appelons ELC la catégorie des espaces (vectoriels topologiques) localement convexes et des applications linéaires continues. C'est encore une sous-catégorie pleine de EPC.

LE FONCTEUR τ .

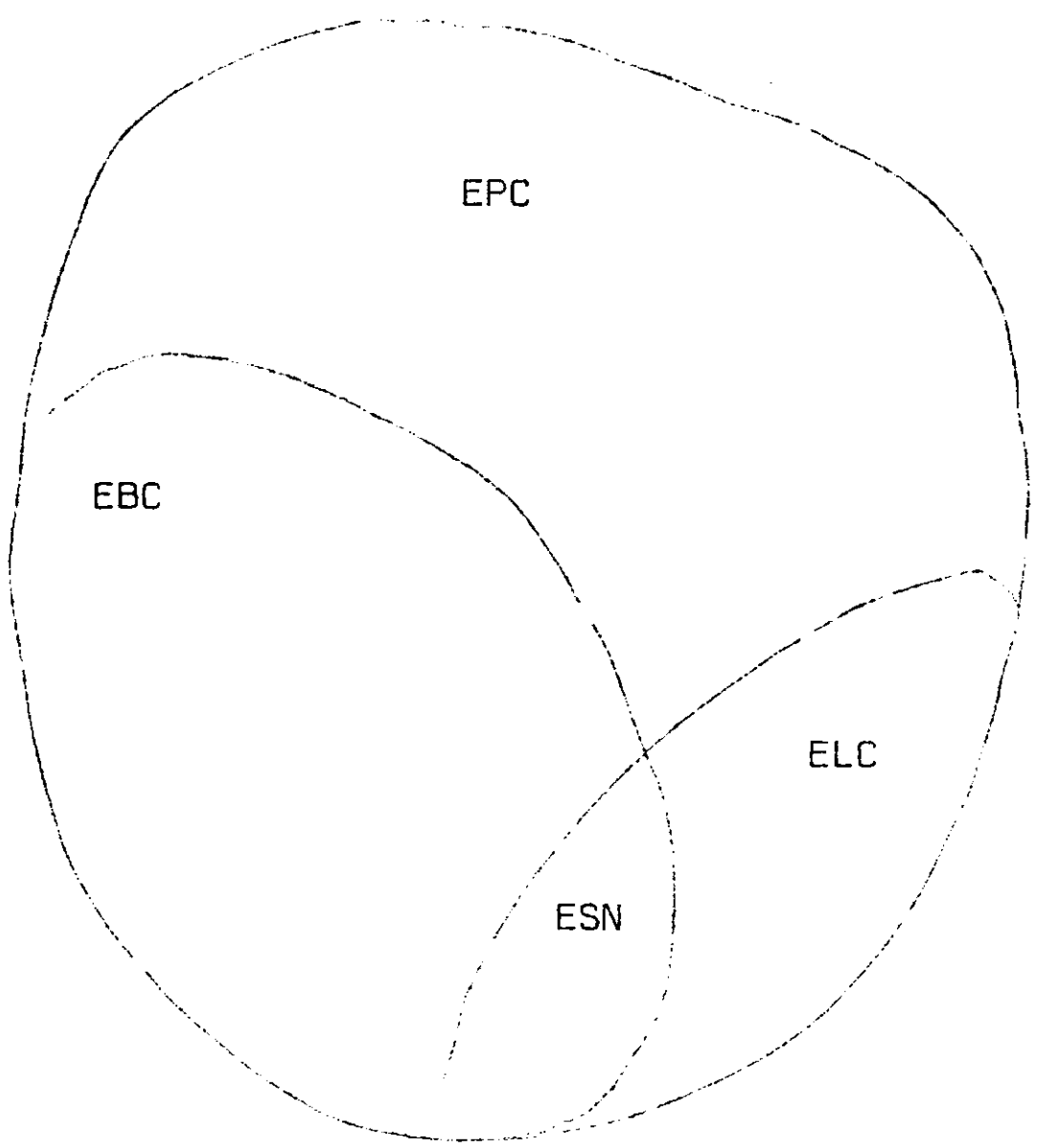
5. On va maintenant définir un foncteur τ de EPC sur ELC. Soit E un espace pseudo-topologique localement convexe. Soit $\mathcal{F}$ = {U/U disque & $\mathcal{F} \to 0$ = U $\in \mathcal{F}$} . C'est un ensemble de disques absorbants (0.2 (iv$_c$)) de E qui est filtrant vers le bas, donc un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie localement convexe sur E . Notons τE l'e.l.c. ainsi obtenu. Notre foncteur est défini pourles objets. Soit f une application linéaire continue : $E \to F$ entre espaces pseudo-topologiques localement convexes. Elle est continue : $\tau F \to \tau F$. (Si V est un disque de F, appartenant à tout filtre tendant vers 0 dans F, $f^{-1}(V)$ est un disque de E qui appartient à tout filtre tendant vers 0 dans E. Soit $\mathcal{F} \to 0$ dans E . Le filtre $f(\mathcal{F}) \to 0$ dans F donc V contient l'image par f d'un élément H de $\mathcal{F}$. Alors $f^{-1}(V)$ contient H, donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$). Si l'on prend pour τf la même application f considérée comme : $\tau E \to \tau F$ on définit bien un foncteur.

6. A priori τE est moins fin que E . C'est par construction le plus fin des espaces topologiques qui soient topologiques et fins que E . On a $\tau E = E$ si et seulement si E est déjà un espace (vectoriel topologique) localement convexe. On a une factorisation comme pour le foncteur β :

$$\begin{tikzcd} & \tau E \arrow[dr, "\tau f"] & \\ E \arrow[ur, "id"] \arrow[rr, "f"'] & & F \end{tikzcd}$$

La catégorie ELC est (par le foncteur τ) une sous-catégorie réflective de EPC. Cela se montre de la même manière que pour β et EBC. Dans ce cas-ci τ est adjoint à gauche à l'injection de ELC dans EPC.

7. L'intersection de EBC et de ELC est ESN, la catégorie des espaces semi-normables. En effet, ces espaces sont caractérisés par le fait que $E = \tau E$ (ils sont vectoriels topologiques localement convexes) et que $E = \beta E$ (ils sont localement bornés).



8. Appelons β_1 et τ_1 les restrictions de β et τ à ELC et EBC respectivement

$$\begin{tikzcd} \mathrm{ELC} \arrow[dr, "\beta_1"'] & \mathrm{EPC} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\beta"] \\ & \mathrm{EBC} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{EBC} \arrow[dr, "\tau_1"'] & \mathrm{EPC} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\tau"] \\ & \mathrm{ELC} \end{tikzcd}$$

Nous allons étudier les relations entre ces deux foncteurs reliant les catégories EBC et ELC.

D'abord τ_1 est susceptible d'une définition particulière : si E est un espace à bornés convexes, le système fondamental $\mathcal{U}$ de voisinages de 0 dans τE peut être redéfini comme suit :

$$\mathcal{U} = \{U/U \text{ disque bornivore}\}$$

En effet, un bornivore (A.3.1) appartient à tout filtre tendant vers 0 puisqu'un tel filtre doit être borné (c'est la définition de localement borné, 0.3.3). Inversément si l'ensemble U appartient à tout filtre tendant vers 0 il appartient en particulier à tout B (B borné) et est donc bornivore.

En particulier, si E est un espace localement convexe, $\tau\beta E$ est l'espace localement convexe bornologique associé au sens habituel (Kelley & Namioka, "L.T.S.", Sec. 19).

Ainsi l'image de τ_1 est formée des espaces localement convexes bornologiques (les objets de la catégorie ELCB). De même les espaces obtenus par l'effet de β_1 à partir d'un espace (vectoriel topologique) localement convexe seront dit espaces à bornés convexes topologique (catégorie EBCT). Cela ne veut pas dire que l'on considère ces espaces comme vectoriels topologiques, mais seulement qu'ils ont la particularité de provenir (par τ) d'un e.l.c.

9. En prenant leur image respective comme nouveau but on change les foncteurs τ_1 et β_1 en les foncteurs surjectifs τ_2 et β_2 , respectivement.

$$\begin{tikzcd}
 & EPC \arrow[dl, shift right, "\tau"'] \arrow[dr, shift left, "\beta"] & \\
ELC \arrow[rr, shift left, "\beta_1"] \arrow[rr, shift right, "\tau_1"'] \arrow[dr, "\beta_2"] & & EBC \arrow[dl, "\tau_2"'] \\
ELCB \arrow[u, dashed] & & EBCT \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

* Dans ce diagramme, les flèches sans nom désignent les inclusions.

EBC et ELC sont des sous-catégories pleines de EPC.

β et τ sont des réflexions.

On montrerait facilement que, de même, EBCT (resp : ELCB) est une sous-catégorie pleine réflective (par $\beta_2\tau_1$ (resp : $\tau_2\beta_1$)) de EBC (resp : ELC) .

10. En outre le foncteur τ_1 est adjoint à gauche de β_1 : si E est un e.b.c. et F un e.l.c., on a :

$$L_{EBC}(E,\beta_1 F) = L_{EPC}(E,F) = L_{ELC}(\tau_1 E,F)$$

en vertu des propriétés d'ajonction de τ et de β par rapport aux foncteurs identiques (0.4.6 et 0.4.3).

Il en résulte que β_1 commute avec les structures initiales et τ_1 avec les structures finales. Il en résulte, en particulier, que $\tau_1 E$ a la structure (vectorielle topologique localement convexe) finale associée aux E_B (B borné de E).

$$\begin{tikzcd}
 & \\
E_B \arrow[r] & E \arrow[r] & \tau_1 E
\end{tikzcd}$$

§ 5. SEPARATION.

1. Soit E un espace vectoriel et B un disque dans E.

DEFINITION. Le disque B est dit normant si l'espace semi-normé E_B correspondant est normé.

On sait qu'un espace semi-normé est normé si la boule unité ne contient pas de droite. Donc B est normant si B ne contient pas de droite.

2. Soit E un espace à bornés convexes.

DEFINITION. L'espace E est dit à bornés normants si tout disque borné de E est normant.

PROPOSITION. La propriété d'être à bornés normants est encore équivalente à chacune des propriétés suivantes :

(1) les bornés de E ne contiennent pas de droite;

(2) E est une union d'espaces normés;

(3) les limites sont uniques;

(4) les limites des suites sont uniques.

Démonstration. Les propriétés (1) et (2) ne font que rappeler des remarques faites ci-dessus. Si un E_B n'est pas normé on peut trouver une suite qui converge vers tout point de l'adhérence de 0 (par exemple la suite (0,0,0,0....). C'est $\sim(2) \Rightarrow \sim(4)$. Et comme $(3) \Rightarrow (4)$ on a $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$. Supposons que $\tilde{x} \to 0$ et $\tilde{x} \to x \neq 0$ dans E . Il existe un disque borné B contenant x tel que $\tilde{x} \to 0$ et $\tilde{x} \to x$ dans E_B qui n'est donc pas séparé. Donc $(2) \Rightarrow (3)$.

3. DEFINITION. L'espace E est dit τ-séparé si l'e.l.c. associé τE est séparé.

PROPOSITION. Le caractère τ-séparé de l'espace E est encore équivalent aux propriétés suivantes :

(1) l'intersection des disques bornivores est nulle;

(2) le dual de E (l'ensemble des formes linéaires bornées) sépare les points de E .

Démonstration. Le premier critère est évident : ces disques bornivores forment un système fondamental de voisinages de 0 de τE . Le second l'est à peu près autant : ce dual de E est aussi le dual, au sens habituel, de τE .

La seconde notion entraîne la première. Ces notions coïncident si E est un e.b.c. topologique. Elles ne sont cependant pas équivalentes : Waelbroeck construit dans "Le Complété & Dual" un exemple d'espace à bornés normants, dont le dual est nul. Pour les questions relativement simples qui sont étudiés dans la première partie, l'hypothèse que l'espace est à bornés normants suffira chaque fois qu'une hypothèse de séparation est nécessaire. Dans la seconde partie, on étudiera les e.l.c. séparés et leurs e.b.c. associés par l'effet de β qui sont donc τ-séparés.

NOTE .

Les espaces à bornés sont apparus chez Marinescu et chez Mikusinski sous la forme de réunions d'espaces normés à propos de distributions et chez Waelbroeck, avec les bornés comme conceptinitial, à propos de théorie spectrale dans les algèbres. Voir à ce sujet "Espaces à bornés" de Sebastião e Silva.

Ces espaces sont étudiés pour eux-mêmes dans "E.B.C." de Buchwalter (on y trouve entre autres les foncteurs β et τ) et dans "Bounded Structures" de Waelbroeck lui-même. Des informations complémentaires peuvent être trouvées dans le volumineux "Séminaire Banach" à l'E.N.S. de la rue d'Ulm à Paris en 1962-63.

Les espaces pseudo-topologiques (et autres notions voisines) sont plus anciens. Sans remonter jusqu'à Kuratowski, citons "Convergences" de Choquet qui a, en un sens, lancé le mouvement. A vrai dire, pour ce qu'on veut en faire, les indications que l'on trouve dans le "Calculus" de Frölicher & Bucker sont amplement suffisantes. Cependant ceux qui veulent approfondir le sujet peuvent aller voir les différents "Limesräume" de Fischer, Harbarth, Sonner, Kowalsky, Grimeisen et autres ainsi que les articles de Bastiani et Binz sur le calcul différentiel dans de tels espaces.

Le lien entre les espaces à bornés convexes et les espaces pseudo-topologiques localement convexes n'a, semble-t-il, jamais été clairement explicité. La convergence de Mackey dans les espaces à bornés convexes joue un rôle important dans "EBC" de Buchwalter, tandis que Frölicher et Bucher utilisent abondamment les ensembles et les filtres bornés. Mais dans l'un et l'autre cas, il s'agit d'un concept secondaire en ce sens qu'il n'y a en aucun cas ces utilisations de ce concept comme terme initial de la structure et encore moins une identification des espaces à bornés convexes avec les espaces pseudo-topologiques localement convexes et localement bornés. Cependant, dans sa note de 1963 sur les espaces à bornés, Silva fait allusion (p.136) à la possibilité de considérer les espaces à bornés convexes comme espaces vectoriels pseudo-topologiques.

Première Partie.

LE CALCUL INFINITESIMAL DANS LES ESPACES A BORNES CONVEXES.

Dans toute cette partie, E, E_1, E_2,...,F et G désignent des e.b.c. A partir de 2.1.7, ces e.b.c. sont supposés être à bornés normants (0.5.2.).

CHAPITRE 1. LES FONCTIONS CONTINUES ENTRE ESPACES A BORNES CONVEXES.

§ 1. FONCTIONS CONTINUES ET ENSEMBLES EQUICONTINUS DE FONCTIONS.

CONTINUITE EN UN POINT.

1. Une fonction f de E dans F est une application d'une partie A de E dans F. Si a est un point de A, on dira que f est continue au point a si pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur A, tendant vers a dans la convergence de Mackey de E, $f(\mathcal{F})$ tend vers f(a) dans F.

Il revient au même de dire : pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur E qui induit un filtre sur A ... . On va même sous-entendre toute référence à l'ensemble de définition A de la fonction f. Si $\mathcal{F}$ n'induit pas un filtre sur A, l'ensemble vide est un élément de $f(\mathcal{F})$; on convient que dans ce cas $f(\mathcal{F})$ converge vers n'importe quoi. Nous allons donc donner à la définition la formulation suivante.

DEFINITION. Ssit f une fonction de E dans F. Elle est continue au point a de E si elle est définie au point a et si

(α) $\mathcal{F} \to a$ dans E $\Rightarrow$ $f(\mathcal{F}) \to f(a)$ dans F .

PROPOSITION. Les énoncés suivants sont équivalents à (α) :

(α_o) $\mathcal{F} \to 0$ dans E $\Rightarrow$ $\Delta_a f(\mathcal{F}) \to 0$ dans F ;

(β_o) $\forall B$ disque borné de E, $\exists$ C d.b. de F : $\Delta_a f$ est continue en 0 : $E_B \to F_C$;

(β) $\forall B$ d.b. de E, $B \ni a \Rightarrow \exists C$ d.b. de F : f est continue en a : $E_B \to F_C$.

Par $\Delta_a f$ on entend la fonction définie par $\Delta_a f(h) = f(a+h) - f(a)$.
On fera une telle consommation de disques bornés qu'il est prudent d'adopter l'abréviation d.b.

Démonstration. Il n'est pas douteux que $(\alpha) \Longleftrightarrow (\alpha_o)$ et $(\beta) \Longleftrightarrow (\beta_o)$. Posons $g = \Delta_a f$.

Soit B un disque borné de E; $\mathcal{V}B \to 0$ donc, si l'on suppose (α_o), $g(\mathcal{V}B) \to 0$ Mais F est localement borné : il existe un disque borné C dans F tel que $g(\mathcal{V}B) \to 0$ dans F_C. Alors g est continue à l'origine : $E_B \to F_C$. Ainsi $(\alpha_o) \Rightarrow (\beta_o)$.

Si $\mathcal{F} \to 0$ dans E, $\mathcal{F} \to 0$ dans un E_B (B disque borné). Si l'on suppose (β_o), $g(\mathcal{F}) \to 0$ dans un F_C (C disque borné) donc, a fortiori, dans F. Ainsi $(\beta_o) \Rightarrow (\alpha_o)$.

2. Le composé de deux fonctions continues est continue : soient f et g des fonctions de E dans F et de F dans G.

THEOREME. Si f est continue au point a et si g est continue en f(a), alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration. D'abord $g \circ f$ est défini au point a. Ensuite on calcule aisément que $\Delta_a(g \circ f) = (\Delta_{f(a)} g) \circ (\Delta_a f)$. Alors, par application répétée de (α_o) on passe de $\hat{\mathcal{F}} \to 0$ à $\Delta_a f(\mathcal{F}) \to 0$ et à $\Delta_{f(a)} g(\Delta_a f(\mathcal{F})) \to 0$; le composé $g \circ f$ vérifie donc aussi (α_o).

3. Les applications multilinéaires présentent, quant à continuité, les particularités auxquelles on s'attend.

PROPOSITION. Une application multilinéaire est continue en tout point dès qu'elle l'est en un seul, par exemple l'origine, et cela a lieu si et seulement si elle est bornée.

La proposition découle de celle qui est démontrée complètement en 1.1.5. Nous allons donner ici une démonstration dans le cas bilinéaire comme illustration de la méthode appliquée en 1.1.5.

Soit f bilinéaire de $E \times F$ dans G. On a :

$$\Delta_{(a,b)} f(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) = f(a,k) + f(h,b) + f(h,k) .$$

Par conséquent $\Delta_{(a,b)} f(\mathcal{F},\mathcal{G})$ est plus fin que $f(a,\mathcal{G}) + f(\mathcal{F},b) + f(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Supposons f continue en (0,0) et montrons que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G} \to 0$ il en est de même de chacun des trois termes de la somme. D'abord $f(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to 0$. Ensuite on peut supposer que $\mathcal{G} = \mathcal{V}\mathcal{G}$ par (iv.a) de 0.2.1. Le filtre $\mathcal{V}a \to 0$ par (iv.c) donc $f(\mathcal{V}a,\mathcal{G}) \to 0$. Or $f(\mathcal{V}a,\mathcal{G}) = \mathcal{V}f(a,\mathcal{G}) = f(a,\mathcal{V}\mathcal{G})$ De même $f(\mathcal{F},b) \to 0$.

La seconde partie de la thèse résulte de la première et de la caractérisation (β_o) de la continuité.

EQUICONTINUITE EN UN POINT.

4. Soit H un ensemble de fonctions de E dans F (on n'exige pas que ces fonctions aient le même domaine de définition).

<u>DEFINITION.</u> L'ensemble H est dit <u>équicontinu au point a</u> si toutes les fonctions qui appartiennent à H sont définies au point a et

$$\mathcal{F} \to 0 \text{ dans } E \Rightarrow \Delta_a H(\mathcal{F}) \to 0 \text{ dans } F .$$

L'ensemble $\Delta_a H(\mathcal{F})$ a pour éléments (V parcourant $\mathcal{F}$) les ensembles :

$$\Delta_a H(V) = \{f(a+h) - f(a) \mid f \in H,\ h \in V,\ f(a+h) \text{ est défini}\}.$$

Comme pour la continuité (1.1.1), l'ensemble H est équicontinu au point a si

$$\forall B \text{ d.b. de } E,\ \exists C \text{ d.b. de } F : \Delta_a H \text{ est équicontinu en } 0 : E_B \to F_C .$$

5. Les applications multilinéaires ont les propriétés habituelles. Appelons <u>équiborné</u> un ensemble H de fonctions d'un e.b.c. dans un autre tel que, pour tout borné B, H(B) soit borné.

PROPOSITION. Un ensemble d'applications n-linéaires ($n \geqslant 1$) est équicontinu en tout point dès qu'il est équicontinu à l'origine et ceci a lieu si et seulement s'il est équiborné.

Démonstration. Soit H un ensemble d'applications n-linéaires de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans F . On a,(si $a = (a_1,\ldots a_n)$ et $h = (h_1,\ldots,h_n)$,

$$\begin{aligned}\Delta_a f(h) &= f(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n) - f(a_1,\ldots,a_n)\\ &= f(h_1,\ldots,h_n)\\ &+ f(a_1,h_1,\ldots,h_n) + \ldots + f(h_1,\ldots,h_{n-1},a_n)\\ &+ f(a_1,a_2,h_3,\ldots,h_n) +\\ &\ldots\\ &+ f(a_1,\ldots,a_{n-1},h_n) + \ldots + f(h_1,a_2,\ldots,a_n).\end{aligned}$$

Supposons H équicontinu en $(0,0,\ldots,0)$ et montrons que si $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n \to 0$ dans $E_1,\ldots,E_n$ respectivement, $\Delta_a H(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n) \to 0$. Pour cela on vérifie que chaque terme de la somme tend vers zéro selon les filtres indiqués. D'abord évidemment $H(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n) \to 0$. Considérons ensuite un terme de la forme $H(a_1,\ldots,a_k,\mathcal{F}_{k+1},\ldots,\mathcal{F}_n)$. On peut supposer, par exemple, $\mathcal{F}_n = \mathcal{V}\mathcal{F}_n$ (0.2.1. (iv.a)). Alors il vient $H(a_1,\ldots,a_k,\mathcal{F}_{k+1},\ldots,\mathcal{F}_n) =$ $H(\mathcal{V}a_1,a_2,\ldots,\mathcal{F}_{k+1},\ldots,\mathcal{F}_n)$ et tout aussi bien $H(\mathcal{V}a_1,\mathcal{V}a_2,\ldots,\mathcal{V}a_k,\mathcal{F}_{k+1},\ldots,\mathcal{F}_n)$. Or $\mathcal{V}a_1,\ldots,\mathcal{V}a_k \to 0$ par (iv.c) de 0.2.1.

La deuxième partie de la thèse devient évidente après que l'on se soit ramené à des espaces semi-normés du type E_B et F_C .

CARACTERE LOCAL DE LA CONTINUITE ET DE L'EQUICONTINUITE.

6. La continuité au point a ne dépend que du comportement de la fonction "au voisinage de" a .

THEOREME. Si deux fonctions f et g coïncident sur un ensemble de la forme a + U avec U bornivore et si f est continue au point a, alors g est continue au point a.

Démonstration. Si $\mathcal{F} \to 0$, $U \in \mathcal{F}$ (on l'a remarqué au passage dans 0.4.8), donc $\{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq U\}$ a les mêmes propriétés de convergence que $\mathcal{F}$. Or $\Delta_a f$ et $\Delta_a g$ coïncident sur U .

L'équicontinuité a aussi un caractère local. Soient H et K deux ensembles de fonctions de E dans F et à un point où toutes les fonctions sont définies. On a, comme ci-dessus,

THEOREME. Si H et K coïncident sur un ensemble de la forme a + U avec U bornivore et si H est équicontinu au point a, alors K est équicontinu au point a.

Soient f une fonction de E dans F, A une partie de E et a un point de A. Il peut arriver, comme dans les structures topologiques, que $f|A$, soit continue au point a, comme fonction : $A \to F$, sans que f le soit. Mais il est clair que la continuité de $f|A$ entraîne celle de f, au point a, lorsque A est de la forme a + U avec U bornivore. Soient, de même, H un ensemble de fonctions de E dans F et U un bornivore. Si l'ensemble $H|(a + U)$ des restrictions $f|(a + U)$ est équicontinu au point a, H l'est aussi. Encore une fois cela tient à ce que les bornivores sont précisément les ensembles qui appartiennent à tout filtre tendant vers 0 .

CONTINUITE UNIFORME SUR LES BORNES.

7. La fonction f de E dans F est continue ou de classe $\mathcal{C}^0$ sur un sous-ensemble A de E ssi elle est continue (et donc définie) en tout point de A .

La condition est donc :

$$\forall a \in A,\ \forall \tilde{\mathcal{F}} \to 0,\ \Delta_a f(\tilde{\mathcal{F}}) \to 0$$

On peut encore exiger que la convergence de $\Delta_a f(\tilde{\mathcal{F}})$ ait lieu uniformément sur A au sens que :

$$\Delta_A f(\tilde{\mathcal{F}}) \to 0 .$$

C'est la <u>continuité uniformément sur A</u> . Nous allons étudier plus particulièrement la continuité uniformément sur chaque borné dans un ensemble donné.

<u>DEFINITION.</u> La fonction f est dite <u>continue uniformément sur les bornés de</u> A ou de classe $\mathcal{C}^\circ$ sur A ssi elle est définie sur A et

$$\forall B \text{ borné} \subseteq A,\ \forall \tilde{\mathcal{F}} \to 0,\ \Delta_B f(\tilde{\mathcal{F}}) \to 0 .$$

Une fois de plus on convient que $\Delta_B f(\tilde{\mathcal{F}})$ est l'ensemble des $\Delta_B f(V)$ où V parcourt $\mathcal{F}$ et qu'un tel $\Delta_B f(V)$ est l'ensemble de ceux des $f(a+h) - f(a)$, avec $a \in B$ et $h \in V$, qui ont un sens.

La condition de la définition revient à

$$\forall B \text{ borné} \subseteq A,\ \Delta_B f \text{ est équicontinu à l'origine.}$$

En formulant l'équicontinuité en termes de E_B et F_C, il vient que la fonction f est encore de classe $\mathcal{C}^\circ$ sur A ssi

$$\forall B \text{ d.b. de } E,\ \exists C \text{ d.b. de } F :$$

$$f \text{ est continue uniformément sur les bornés de } A : E_B \to F_C .$$

8. <u>THEOREME.</u> Une fonction continue uniformément sur les bornés d'un ensemble convexe est bornée sur ces bornés.

<u>Démonstration.</u> On se propose d'appliquer le théorème sur la continuité uniforme donnée en A.1. Soit f la fonction de E dans F qui est continue uniformément sur les bornés du convexe A . Soient B un borné convexe dans A et D un disque borné de E contenant B . Dans E_D la fonction f est unifor-

mément continue sur B (pour la semi-norme d'un certain F_C); elle est donc bornée sur B.

Dans cette démonstration, l'ensemble A est supposé convexe pour que tout borné de A soit contenu dans un borné convexe, donc étoilé autour d'un point. Sans modifier le théorème énoncé en A.1, le résultat démontré ici peut être étendu à des ensembles A dont la géométrie est plus compliquée, comme une réunion finie de convexes, ou une réunion filtrante croissante de bornés étoilés autour d'un point, etc.

Ce résultat est intéressant. D'abord il illustre bien la fécondité du point de vue "union d'espace normés" et de la technique "E_B et F_C". Ensuite il est précieux pour la stabilité de la classe $\mathcal{E}^\circ$. Un problème de ce genre se posait dans les espaces pseudo-topologiques de Frölicher et Bucher pour leurs fonctions "equably continuous". Ces fonctions n'étaient pas, en général, "quasi-bounded" et il en résultait que leur composé n'était plus nécessairement "equably continuous" ("Calculus, p.25). Au contraire on a un tel théorème de composition dans la situation présente et on verra que sa démonstration repose lourdement sur le théorème qui précède.

9. <u>THEOREME.</u> Soient f une fonction de E dans F et g de F dans G . Si f est continue uniformément sur les bornés d'un convexe A et g sur ceux de l'ensemble f(A), alors le composé $g\circ f$ est continu uniformément sur les bornés de A .

<u>Démonstration.</u> On a $\Delta_a(g\circ f)(h) = \Delta_{f(a)}\, g(\Delta_a f(h))$.
Si f est de classe $\mathcal{E}^\circ$ sur le convexe A ,

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ borné} \subseteq A \\ \mathcal{F} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} f(B) \text{ borné} & (1.1.8) \\ \Delta_B f(\mathcal{F}) \to 0 & (1.1.7) \end{array}\right.$$

Si g est de classe $\mathcal{E}^\circ$ sur f(A),

$$\left.\begin{array}{l} f(B) \text{ borné} \\ \Delta_B f(\mathcal{F}) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta_{f(B)} g(\Delta_B f(\mathcal{F})) \to 0$$

Alors Δ_B $(g\circ f)(\mathcal{F})$, plus fin, tend vers 0 .

EQUICONTINUITE UNIFORME SUR LES BORNES.

10. Soit H un ensemble de fonctions de E dans F . Soit A une partie de E.

<u>DEFINITION</u>. L'ensemble H est dit <u>équicontinu uniformément sur les bornés</u> de A ssi chaque élément de H est défini sur A et

$$\forall B \text{ borné} \subseteq A,\ \forall \mathcal{F} \to 0\ ,\ \Delta_B H(\mathcal{F}) \to 0\ .$$

Comme pour une seule application, il est clair que la condition équivaut à :

$\forall B$ borné $\subseteq A$, $\Delta_B H$ est équicontinu à l'origine,

soit encore :

$\forall B$ d.b. de E, $\exists$ C d.b. de F :

H est équicontinu uniformément sur les bornés de A : $E_B \to F_C$.

11. Si l'on reprend la démontration du théorème à l'appendice A.1. dans le cas d'un ensemble H de fonctions, on arrive à :

$$\forall f \in H,\ \|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + M$$

avec x_0 et M indépendants de f. Cela donnerait dans la situation considérée ici, pour un borné B convexe sur lequel H est uniformément équicontinu,

$$H(B) \subseteq H(x_0) + D$$

pour $x_0 \in A$ et D borné bien choisis. On ne peut pas affirmer pour autant que tout ensemble équicontinu uniformément sur les bornés est équiborné. Ce serait d'ailleurs un résultat absurde : sur la droite réelle, l'ensemble des fonctions constantes n (n entier) est évidemment équicontinu, même uniformément, et non équiborné.

Le caractère équiborné ne résultant généralement pas de l'équicontinuité uniforme, on en est réduit à l'imposer comme condition supplémentaire si l'on veut un théorème de composition.

THEOREME. Le composé de deux ensembles équibornés et équicontinus uniformément sur les bornés est équiborné et équicontinu uniformément sur les bornés.

Démonstration. Soient H un ensemble de fonctions de E dans F et K un ensemble de fonctions de F dans G . Soient B un borné de E et $\mathcal{F}$ tendant vers 0 dans E . Si H est équiborné, H(B) est borné et si H est équicontinu uniformément sur les bornés, $\Delta_B H(\mathcal{F}) \to 0$. Si de plus K est équiborné, K(H(B)) est borné et si K est équicontinu uniformément sur les bornés, $\Delta_{H(B)} K(\Delta_B H(\mathcal{F})) \to 0$, donc $\Delta_B(K\circ H)(\mathcal{F})$, plus fin, tend vers 0. Ainsi $K\circ H$ est à la fois équiborné et équicontinu uniformément sur les bornés.

12. PROPOSITION. Un ensemble d'applications n-linéaires ($n \geq 1$) est équicontinu uniformément sur les bornés si et seulement s'il est équiborné.

Démonstration. Soit H un ensemble d'applications n-linéaires : $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to F$. On sait déjà que H est équiborné ss'il est équicontinu à l'origine (1.1.5). On décompose $\Delta_a f(h)$ comme en 1.1.5. Supposons H équicontinu à l'origine et montrons que si $B_1,\ldots,B_n$ sont bornés et $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n \to 0$ dans $E_1,\ldots,E_n$ respectivement, alors $\Delta_{B_1 \times\ldots\times B_n} H(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n) \to 0$ dans F. Considérons un terme de la forme $H(B_1,\ldots,B_k,\mathcal{F}_{k+1},\ldots,\mathcal{F}_n)$. On peut, par 0.2.1. (iv.a), et c'est la technique utilisée en 1.1.5, supposer que $\mathcal{F}_n = \mathcal{V}\mathcal{F}_n$ d'où il vient, en déplaçant $\mathcal{V}$ par la multilinéarité :

$$H(B_1,\ldots,B_k,\mathcal{F}_{k+1},\ldots,\mathcal{F}_n) = H(\mathcal{V}B_1,\ldots,\mathcal{V}B_k,\mathcal{F}_{k+1},\ldots,\mathcal{F}_n)$$

et ce terme tend bien vers zéro puisque les B_i sont bornés.

§ 2. ESPACES D'APPLICATIONS LINEAIRES ET MULTILINEAIRES.

APPLICATIONS LINEAIRES.

1. Nous noterons $L(E;F)$ l'espace des applications linéaires continues (c'est-à-dire bornées) de E dans F, avec pour ensemble bornés, les ensembles équicontinus (ou équibornés) d'applications linéaires continues.

Dans la deuxième partie, nous travaillerons avec des espaces localement convexes et avec leurs espaces à bornés convexes associés qui sont topologiques par définition. Il est intéressant de voir que les espaces d'applications linéaires bornées correspondants seront du même type.

PROPOSITION. Si F est un e.b.c. topologique, alors l'e.b.c. $L(E,F)$ est également topologique : sa structure à bornés est celle associée à la topologie de convergence uniforme sur les bornés de E.

Précisons encore le sens de l'énoncé. L'hypothèse équivaut à $F = \beta\tau F$. Sur l'espace vectoriel $L(E;F)$ on peut mettre la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E relativement à la topologie de τF. On va voir que l'e.b.c. $L(E;F)$ est l'e.b.c. associé à $L(E;F)$ considéré ainsi comme espace localement convexe.

Démonstration. Un système fondamental de voisinages de zéro pour la topologie de convergence uniforme sur $L(E;F)$ est formé des ensembles $N(B,V) = \{f \in L(E;F) \mid f(B) \subseteq V\}$ où B est un disque borné de E et V un disque voisinage de zéro dans τF. Alors dire qu'un ensemble H est borné équivaut à, successivement :

$\forall B$ d.b. de E, $\forall V$ disque voisinage de zéro, $\exists \varepsilon > 0 : \varepsilon H \subseteq N(B,V)$;

$\forall B\ldots, \forall V,\ldots, \exists \varepsilon > 0 : \varepsilon H(B) \subseteq V$;

$\forall B\ldots, H(B)$ est borné $\beta\tau F$;

H est équiborné : $E \to \beta\tau F = F$.

2. Une dérivée en un point est définie comme une application linéaire. Si cela se réduit à un vecteur dans le cas des fonctions d'une variable réelle, cela résulte de la

PROPOSITION. L'e.b.c. $L(R;E)$ est isomorphe à E.

Démonstration. On sait que l'espace des applications linéaires de R dans E est vectoriellement isomorphe à E (par l'évaluation au point $1 \in R$, pour fixer les idées). Cet espace d'applications est $L(R;E)$: les applications linéaires de R dans E sont bornées par l'axiome (iii) de 0.1.1. Enfin les bornés de $L(R;E)$ correspondent trivialement à ceux de E par l'évaluation au point 1.

3. On a vu dans l'introduction l'importance cruciale de l'opération de composition des applications linéaires.

PROPOSITION. L'application canonique de composition :

$$L(E;F) \times L(F;G) \longrightarrow L(E;G)$$

est continue.

Démonstration. Cette application $(\ell,m) \rightsquigarrow m \circ \ell$ étant bilinéaire, il suffit de vérifier qu'elle est bornée. Soient H un borné de $L(E;F)$ et K un borné de $L(F;G)$. Pour tout borné B de E, $H(B)$ est borné dans F donc $K(H(B))$ est borné dans G. Ainsi $K \circ H$ est borné dans $L(E;G)$.

COROLLAIRE. L'application canonique d'évaluations :

$$L(E;F) \times E \longrightarrow F$$

est continue.

Cela résulte des deux propositions précédentes en faisant $E = L(R;E)$ et $F = L(R;F)$.

DECOMPOSITION EN APPLICATIONS PARTIELLES.

4. L'isomorphisme que nous démontrons maintenant est la base des relations entre dérivée et dérivées partielles.

PROPOSITION. Les e.b.c. $L(E_1 \times E_2; F)$ et $L(E_1;F) \times L(E_2;f)$ sont isomorphes

Démonstration. 1° L'application linéaire qui à $\ell_1 \in L(E_1;F)$ et $\ell_2 \in L(E_2;F$ associe $\ell_1 \oplus \ell_2 \in L(E_1 \times E_2;F)$ est bornée ($\ell_1 \oplus \ell_2(x_1,x_2)$ désigne $\ell_1(x_1) + \ell_2(x_2)$) : soient H_1 et H_2 des bornés de $L(E_1;F)$ et $L(E_2;F)$ respectivement et B_1 et B_2 des bornés de E_1 et E_2 respectivement, $(H_1 \oplus H_2)(B_1 \times B_2) = H_1(B_1) + H_2(B_2)$ borné comme somme de bornés dans F.

2° L'application linéaire qui à $\ell \in L(E_1 \times E_2;F)$ associe $\ell_1 \in L(E_1;F)$, où $\ell_1(h) = \ell(h,0)$, est bornée : soient H un borné de $L(E_1 \times E_2;F)$, H_1 son image dans $L(E_1;F)$ et B un borné de E_1, $H_1(B) = H(B \times \{0\})$ est borné dans F. La même chose vaut pour l'autre côté.

3° Par conséquent l'application linéaire $\ell \rightsquigarrow (\ell_1,\ell_2)$, inverse de celle considérée au 1°, est bornée.

APPLICATIONS MULTILINEAIRES.

5. Nous noterons $L(E_1,E_2,\ldots,E_n;F)$ l'espace des applications n-linéaires continues de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans F avec pour bornés les ensembles équi-bornés. L'espace des applications n-linéaires continues de E^n dans F sera noté aussi $L^n(E;F)$. Remarquons pour éviter toute confusion que $L(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n;F)$ et $L(E^n;F)$ désignent des espaces d'applications linéaires continues.

Les résultats que nous avons donnés pour les espaces d'applications linéaires s'appliquent aux espaces d'applications multilinéaires grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION. Les e.b.c. $L(E;L(F;G))$ et $L(E,F;G)$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit f bilinéaire bornée de $E \times F$ dans G . Pour chaque x, l'application $g(x) : y \rightsquigarrow f(x,y)$ est linéaire et bornée, c'est-à-dire que $g(x)$ est un élément de $L(F;G)$. Ensuite l'application $x \rightsquigarrow g(x)$ est elle-même linéaire et bornée. Soit B un borné de E. L'ensemble $g(B)$ dans $L(F;G)$ y est borné puisque si C est un borné de F, $g(B)(C)$ n'est autre que le borné $f(B \times C)$ dans G. Voila pour la définition d'une application de $L(E,F;G)$ dans $L(E;L(F;G))$. On se convaincra aisément que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On va voir maintenant que les bornés se correspondent exactement : soit H un borné de $L(E;L(F;G))$ et K l'ensemble qui y correspond dans $L(E,F;G)$. Dire que H est borné revient à dire que, successivement,

$\forall B$ borné de E, $H(B)$ est borné dans $L(F;G)$;

$\forall B$ borné de E, $\forall C$ borné de F, $H(B)(C)$ est borné dans G;

K est borné dans $L(E,F;G)$.

CHAPITRE 2. LA DERIVEE DANS LES ESPACES A BORNES CONVEXES.

§ 1. LA DERIVEE EN UN POINT.

0. De manière très générale on dit qu'une fonction f est dérivable en un point a si l'accroissement de la fonction peut être approché en une fonction linéaire continue ℓ de l'accroissement de la variable à partir de a, en sorte que :

$$f(a+h) - f(a) = \ell(h) + r(h)$$

où l'on impose au reste r(h) de tendre vers zéro "plus vite que h". On dira d'un tel reste qu'il est un o(h) ou un infiniment petit. Il faut encore définir, dans chaque calcul différentiel particulier, ce que l'on entend par tendre vers zéro "plus vite que h".

LES INFINIMENT PETITS.

1. A une fonction r de E dans F nous associerons, comme Frölicher et Bucher dans leur "Calculus", la fonction θr de $R \times E$ dans F définie par :

$$\begin{cases} \theta r(0,x) = 0 \\ \theta r(t,x) = \dfrac{r(tx)}{t} \quad \text{si } t \neq 0 \text{ et si } r(tx) \text{ est défini.} \end{cases}$$

DEFINITION. La fonction r est un infiniment petit (d'ordre 1), ou r(h) est un o(h), ssi, pour tout B borné de E, $\theta r(\mathcal{V},B)$ tend vers zéro dans F.

PROPOSITION. La fonction r est un infiniment petit ssi l'une des conditions équivalentes suivantes a lieu :

(1) $\forall B$ disque borné de E, $\theta r(\mathcal{V},B) \to 0$ dans F;

(2) $\forall B$ d.b. de E, $\exists C$ d.b. de F : r(h) est un o(h) : $E_B \to F_C$ (au sens de Fréchet classique);

(3) $\forall B$ d.b. de E, $\exists C$ d.b. de F :

$\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 : b \in B$ et $|t| \leq \delta \Rightarrow r(tb) \in \varepsilon t C$

Démonstration. La condition (1) est clairement équivalente à celle de la définition puisque tout borné est contenu dans un disque borné. La condition (3) n'est que l'explicitation de (1). L'équivalence de (2) et (3) résulte du lemme suivant.

LEMME. Si E et F sont semi-normés, la condition de Fréchet habituelle :

(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x\| \leqslant \delta \implies \|r(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$

est équivalente à la condition suivante :

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|h\| \leqslant 1$ et $|t| \leqslant \delta \implies \|r(th)\| \leqslant \varepsilon |t|$.

Démonstration. Soit $\|x\| \leqslant \delta$. On a $x = \|x\| \frac{x}{\|x\|}$, ce qui est de la forme th avec $|t| \leqslant \delta$ et $\|h\| \leqslant 1$. Si l'on suppose (b), on a $\|r(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ et donc (a).

Inversément si $|t| \leqslant \delta$ et $\|h\| \leqslant 1$, on a $\|th\| \leqslant |t| \leqslant \delta$. Il résulte alors de (a) que $\|r(th)\| \leqslant \varepsilon \|th\| \leqslant \varepsilon |t|$, soit (b).

On paraphrasera habituellement ces conditions de la manière suivante :

$$\lim_{t \not\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0 \quad \text{uniformément en h sur les bornés.}$$

2. La continuité des fonctions dérivables résulte du théorème suivant.

THEOREME. Un infiniment petit est continu à l'origine.

Démonstration. D'après la condition (3) donnée en 2.1.1. ci-dessus, si $|t| \leqslant \delta \leqslant 1$, $r(tB) \subseteq \varepsilon tC \subseteq \varepsilon C$. Ainsi $r(\mathcal{V}B) \to 0$ pour tout B borné. A fortiori $r(\mathcal{F}) \to 0$ pour tout $\mathcal{F} \to 0$.

3. La proposition suivante fournira l'unicité de la dérivée.

PROPOSITION. Un infiniment petit est nul s'il est homogène pour t assez petit et si l'espace où il prend ses valeurs est à bornés normants.

Démonstration. Si, pour t assez petit, $r(tx) = tr(x)$, $\lim \frac{r(tx)}{t} = r(x)$. Mais d'autre part $\frac{r(tx)}{t}$ tend vers zéro. Donc $r(x) = 0$ si les limites sont uniques (0.5.2).

4. PROPOSITION. Les combinaisons linéaires d'infiniment petits sont des infiniment petits.

Démonstration. Soient $r(h)$ et $s(h)$ des $o(h)$ et considérons la formulation (2) de 2.1.1. Soit B un disque borné. Si $\|x\|_B$ est assez petit, $r(x) \in \varepsilon \|x\|_B C$ et $s(x) \in \varepsilon \|x\|_B C'$, d'où
$ar(x) + bs(x) \in \varepsilon \|x\|_B (aC + bC') \subseteq \varepsilon \|x\|_B C''$, pour des disques bornés C, C' et C" convenablement choisis.

LA DERIVEE EN UN POINT.

5. Soient f une fonction de E dans F et a un point de E .

DEFINITION. La fonction f est dite dérivable au point a ssi elle est définie au point a et s'il existe une application linéaire continue ℓ de E dans F telle que le reste :

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - \ell(h)$$

soit un $o(h)$. On dit alors que ℓ est dérivée de f au point a.

6. Peut-on dire que ℓ est la dérivée ?

PROPOSITION. Lorsque l'espace où la fonction prend ses valeurs est à bornés normants, la dérivée en un point, si elle existe, est unique.

Démonstration. La différence entre deux dérivées en un même point est un infiniment petit (2.1.4.) linéaire et donc nul (2.1.3.).

Pour simplifier, nous allons, comme annoncé, supposer à partir d'ici que tous les espaces à bornés convexes donnés sont à bornés normants. Alors on peut parler sans ambiguïté de l'application linéaire dérivée comme de <u>la dérivée de</u> f <u>au point</u> a que l'on note f'(a).

7. <u>THEOREME.</u> Une fonction est continue en tout point où elle est dérivable

<u>Démonstration.</u> L'expression $f(a+h)-f(a)-f'(a)(h)$ est continue en h à l'origine parce que c'est un $o(h)$. Comme $f'(a)$ est supposée continue, il faut que f le soit au point a.

8. <u>PROPOSITION.</u> Une application n-linéaire ($n \geq 1$) continue est dérivable en tout point et l'on a :

$$f'(a_1,\dots,a_n)(h_1,\dots,h_n) = f(a_1,a_2,\dots a_{n-1},h_n) + \dots + f(h_1,a_2,\dots,a_n).$$

<u>Démonstration.</u> On considère encore la décomposition de $\Delta_a f(h)$ effectuée en 1.1.5. On retient, pour dérivée de f, ceux des termes qui sont linéaires en $h_1,\dots,h_n$ et, comme f, continus . Le reste constitue un $o(h_1,\dots,h_n)$. Considérons un terme de la forme $r(h) = f(a_1,\dots,a_k,h_{k+1},\dots,h_n)$ en supposant $k \leq n-2$. Il vient : $\frac{r(th)}{t} = \frac{t^p r(h)}{t}$ avec $p \geq 2$.
Cette expression tend vers zéro avec t, uniformément en h sur les bornés parce que r, comme f, est borné sur les bornés.

9. Si f est dérivable au point a, on a :

$$f'(a)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

uniformément en h sur les bornés.

Inversément supposons f et a tels que la limite :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

existe pour tout h, uniformément en h sur les bornés. Cette quantité est homogène et la différence $f(a+h) - f(a) - \lim \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ est un $o(h)$. Pour que ce soit la dérivée $f'(a)(h)$ il faut et il suffit que cette expression soit additive (pour être linéaire) et continue (ce qui revient à supposer f continue).

CARACTERE LOCAL DE LA DERIVEE.

10. La dérivée au point a ne dépend que du comportement de la fonction "au voisinage de" ce point.

THEOREME. Si deux fonctions f et g coïncident sur un ensemble de la forme a+U avec U bornivore et si f est dérivable au point a, alors g est dérivable au point a et $g'(a) = f'(a)$.

Démonstration. Soient B un disque borné. Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha B \subseteq U$. On a $\lim \frac{g(a+th) - g(a)}{t} = \lim_{|t|\leq\alpha} \frac{g(a+th)-g(a)}{t} = \lim_{|t|\leq\alpha} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = f'(a)(h)$, uniformément sur B. Il résulte des remarques faites en 2.1.9 que $f'(a)$, linéaire et continu, est la dérivée de g au point a.

LES O(h).

11. Pour un certain nombre de propriétés de la dérivation (la règle de dérivation d'un composé et ses conséquences) il sera intéressant de définir les fonctions qui sont "du même ordre" que la variable. Soit f une fonction de E dans F.

DEFINITION. On dit que f est de l'ordre de la variable (ou que f(h) est un O(h)) ssi, pour tout B borné de E, $\theta f(\mathcal{V},B)$ est borné (c'est-à-dire : comprend un ensemble borné).

Comme en 2.1.1. pour les o(h), la définition d'un O(h) admet d'autres formulations :

PROPOSITION. La fonction f est de l'ordre de la variable, si l'une des conditions équivalentes suivantes a lieu :

(1) $\forall B$ d.b. de E, $\exists C$ d.b. de F :

$\exists \delta > 0 : |t| \leq \delta \Rightarrow f(tB) \subseteq tC$;

(2) $\forall B$ d.b. de E, $\exists C$ d.b. de F : f est un O : $E_B \to F_C$;

(3) $\forall B$ d.b. de E, $\exists C$ d.b. de F :

$\exists \delta > 0 : \|x\|_B \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\|_C \leq \|x\|_B$

COROLLAIRES. 1° Une application linéaire est de l'ordre de la variable si et seulement si elle est continue.

2° L'image inverse d'un bornivore par une fonction de l'ordre de la variable est un bornivore.

Démonstration. Le 1° ne fait pas de difficulté. Considérons une fonction f de E dans F de l'ordre de la variable et soient U un bornivore dans F et B un disque borné dans E . Par (1) il existe un disque borné C dans F tel que $f(tB) \subseteq tC$ pour t assez petit. Pour t assez petit on a également $tC \subseteq U$ donc $f(tB) \subseteq U$ c'est-à-dire $tB \subseteq f^{-1}(U)$. On a ainsi démontré le 2°.

12. PROPOSITION. Un o(h) est un O(h). Les composés de O(h) sont des O(h). Les composés de O(h) et de o(h) dans un ordre quelconque sont des o(h). Les combinaisons linéaires de O(h) sont des O(h).

Démonstration fort longue et trop élémentaire pour être donnée tout au long. Considérons à titre d'exemple le cas, sans doute le moins trivial, d'un composé $g \circ f$ où f de E dans F est un infiniment petit tandis que g de F dans G est de l'ordre de la variable. Soient B un disque borné de E et C le disque borné dans F qui satisfait avec B à la condition (2) de 2.1.1.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que :

$$\|x\|_B \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)\|_C \leqslant \varepsilon \|x\|_B .$$

Maintenant soient D disque borné de G et $\delta' > 0$ tels que :

$$\|y\|_C \leqslant \delta' \Rightarrow \|g(y)\|_D \leqslant \|y\|_C .$$

Il suffit de prendre $\delta'' \leqslant \delta$ tel que $\varepsilon\delta'' \leqslant \delta'$ et de faire $y = f(x)$ pour obtenir : $\|x\|_B \leqslant \delta'' \Rightarrow \|(g\circ f)(x)\|_D \leqslant \varepsilon \|x\|_B$.

<u>COROLLAIRE.</u> Si la fonction f est dérivable au point a, la différence $f(a+h) - f(a)$ est un $O(h)$.

<u>Démonstration.</u> On a $f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) +$ un $o(h)$.
Ce dernier est un $O(h)$ par la proposition qui précède, tandis que $f'(a)(h)$ est un $O(h)$ par le premier corollaire dans 2.1.11.

REGLES DE DERIVATION.

13. <u>THEOREME.</u> (Règle de dérivation d'une fonction de fonction). Si la fonction f est dérivable en un point a et g en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et sa dérivée est donnée par la formule :

$$(g\circ f)'(a)(h) = g'(f(a))(f'(a)(h)).$$

<u>Démonstration.</u> On peut écrire $f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + r(h)$ et $g(f(a)+k) - g(f(a)) = g'(f(a))(k) + s(k)$ où $r(h)$ est un $o(h)$ et $s(k)$ un $o(k)$. Il vient alors pour la différence de $g\circ f$, en faisant $k = f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + r(h)$, $g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f'(a)(h)) + g'(f(a))(r(h)) + s(f'(a)h + r(h))$. Dans cette dernière somme, le premier terme est linéaire et continu en h tandis que les deux autres constituent un $o(h)$ par 2.1.12.

14. Considérons une application bilinéaire $(g_1,g_2) \rightsquigarrow \langle y_1,y_2\rangle$ de $F_1 \times F_2$ dans G. Si l'on a deux fonctions f et g de E dans F_1 et F_2 respectivement, on peut parler de leur produit $\langle f,g\rangle$: $x \rightsquigarrow \langle f(x),g(x)\rangle$ qui est une fonction de E dans G . De même on peut faire le produit $\langle f,y\rangle$ d'une fonction dans F_1 par un vecteur de F_2 . La règle de Leibnitz se généralise aux produits bilinéaires de fonctions. Un tel produit sera considéré comme le composé de l'application bilinéaire et de la fonction $x \rightsquigarrow (f(x),g(x))$ de E dans $F_1 \times F_2$. Il nous faut d'abord examiner cette fonction.

<u>LEMME.</u> Si les fonctions f et g sont dérivables au point a, la dérivée en ce point de la fonction $x \rightsquigarrow (f(x),g(x))$ est l'application linéaire $h \rightsquigarrow (f'(a)(h),g'(a)(h))$.

<u>Démonstration.</u> On a $\big(f(a+h),g(a+h)\big) - \big(f(a),g(a)\big) =$ $\big(f'(a)(h),g'(a)(h)\big) + \big(r(h),s(h)\big)$ où $r(h)$ et $s(h)$ sont des $o(h)$. Le couple $\big(r(h), s(h)\big)$ est un $o(h)$ comme ses composantes puisque $\dfrac{\big(r(th),s(th)\big)}{t} = \left(\dfrac{r(th)}{t}, \dfrac{r(th)}{t}\right)$.

Comme on connaît d'autre part (2.1.8) la dérivée d'une application bilinéaire continue, on peut appliquer 2.1.13.

<u>PROPOSITION.</u> (Règle de dérivation d'un produit). Un produit bilinéaire continu de deux fonctions f et g dérivables au point a est dérivable en ce point et sa dérivée est :

$$\langle f'(a),g(a)\rangle + \langle f(a),g'(a)\rangle .$$

15. <u>PROPOSITION.</u> (Règle de dérivation de la fonction réciproque). Si deux fonctions sont inverses l'une de l'autre et si elles sont dérivables en des points qui se correspondent, alors leurs dérivées en ces points sont inverses l'une de l'autre.

Il ne s'agit bien sur pas encore ici d'affirmer l'existence ni même la différentiabilité de la fonction inverse. Ces problèmes seront traités au chapitre 5.

<u>Démonstration.</u> Soient f et f^{-1} dérivables en a et $f(a)$ respectivement. Le composé $(f^{-1})'(f(a)) \circ f'(a) = (f^{-1} \circ f)'(a)$ est la dérivée au point a de l'identité. C'est donc l'identité.

§ 2. LA FONCTION DERIVEE.

DERIVEES SUCCESSIVES.

1. Soit f une fonction de E dans F .

DEFINITION. La fonction f est dite dérivable, ou différentiable, sur un ensemble A si elle est dérivable (et donc définie) en chaque point de A . La fonction $f' : x \rightsquigarrow f'(x)$ définie sur A au moins et a valeurs dans $L(E;F)$ est alors la fonction dérivée de f tandis que la fonction correspondante df de $E \times E$ dans F définie par $df(x,h) = f'(x)(h)$ en est la différentielle.

Le choix d'une définition de la classe $\mathcal{C}^1$ est délicat du fait du sens que nous donnons à fonction. Supposons que f soit définie sur E tout entier et que nous nous intéressions à son allure sur un segment S, par exemple. On sait ce que veut dire dérivable sur S . Mais pour la continuité de la dérivée ? On pourrait demander seulement que la restriction de f' à S soit continue. A l'autre extrême, on pourrait demander que f' existe au moins sur un ensemble de la forme S+U, avec U bornivore, et soit continue sur S. Le choix fait ici est intermédiaire:

DEFINITION. La fonction f est dite continûment dérivable, ou de classe $\mathcal{C}^1$, sur un ensemble A si elle est dérivable sur A et si la fonction dérivée est continue sur A. Elle est dite de classe $\mathcal{E}^1$ sur A lorsque la continuité de la dérivée a lieu uniformément sur les bornés de A (si la dérivée est de classe $\mathcal{E}^0$ sur A).

Les dérivées suivantes et les classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{E}^n$ sur un ensemble A sont définies de la même manière par récurrence sur n:

<u>DEFINITION</u> : Supposons définie $f^{(n-1)}$, la dérivée $(n-1)^e$; on dit que f est <u>n fois dérivable sur</u> l'ensemble A si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur A . La dérivée n^e, $f^{(n)}$, est la dérivée de $f^{(n-1)}$. La fonction f est <u>de classe</u> $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{E}^n$ sur A si elle est n fois dérivable sur A et si $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^\circ$ ou $\mathcal{E}^\circ$ sur A .

En appliquant 2.1.7 à chaque stade de la récurrence, on voit qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Il faudra attendre 4.1.4. pour voir que, dans une situation moins générale, la classe $\mathcal{E}^n$ contient les classes $\mathcal{E}^k$ si $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. <u>PROPOSITION.</u> Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ a une différentielle continue.

<u>Démonstration.</u> La différentielle df de la fonction f est le composé

$$E \left(\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f'} & L(E,F) \\ \xrightarrow{\text{identité}} & E \end{array} \right) \xrightarrow{\text{évaluation}} F$$

de fonctions continues.

On démontrerait de même qu'une fonction de classe $\mathcal{E}^1$ a une différentielle continue uniformément sur les bornés.

COMPOSITION DE FONCTIONS DERIVABLES.

3. <u>THEOREME.</u> Le composé de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

<u>Démonstration.</u> Soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de E dans F et de F dans G respectivement. La dérivée de $g \circ f$ est (2.1.13) le composé :

$$\left.\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\quad g' \quad} & L(F,G) \\ {}^{f}\nearrow & & \\ E & \longrightarrow & L(E,F) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{composition}} L(E,G)$$

de fonctions continues.

Lorsque nous saurons (4.1.4.) que, dans une situation moins générale, une fonction de classe $\mathcal{E}^1$ est aussi $\mathcal{E}^\circ$, nous pourrons utiliser la démonstration pour la classe $\mathcal{E}^1$ (4.1.5.).

L'application bilinéaire de composition des applications linéaires, étant continue (1.2.3.), est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ (2.1.8).

<u>THEOREME.</u> Le composé de deux fonctions n fois dérivables est n fois dérivable; le composé de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

<u>Démonstration.</u> C'est vrai si n = 1 (2.1.13 et 2.2.3). Supposons le théorème démontré pour les fonctions (n-1) fois dérivables et pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^{n-1}$. Alors un composé, disons $g \circ f$, de fonctions n fois dérivables ou de classse $\mathcal{C}^n$ a pour dérivée le composé indiqué par le diagramme de la démonstration précédente, lequel est (n-1) fois dérivable ou de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

DERIVEES PARTIELLES.

4. Soit f une fonction du produit $E_1 \times E_2$ dans F.

<u>DEFINITION.</u> <u>La dérivée partielle selon</u> E_1 <u>de f au point</u> $a = (a_1,a_2)$ de $E_1 \times E_2$ est la dérivée au point a_1 de la fonction $x \rightsquigarrow f(x,a_2)$ de E_2 dans F. Cette dérivée est notée $f'_1(a_1,a_2)$. On définit de même <u>la dérivée partielle</u> $f'_2(a_1,a_2)$ <u>selon</u> E_2 <u>de</u> f <u>au point</u> a.

5. PROPOSITION. Si f est dérivable au point a, ses dérivées partielles existent au point a et l'on a :

$$f_1'(a)(h) = f'(a)(h,o);$$
$$f_2'(a)(k) = f'(a)(o,k).$$

Démonstration. $x \rightsquigarrow f(x,y)$ est le composé de f avec la fonction $x \rightsquigarrow (x,y)$. La dérivée de $x \rightsquigarrow x$ est l'identité et la dérivée de la fonction constante $x \rightsquigarrow y$ (y fixé) est 0. Donc la dérivée de $x \rightsquigarrow (x,y)$ est $h \rightsquigarrow (h,o)$. La thèse résulte de la règle de dérivation d'une fonction de fonction.

6. Les dérivées partielles f_1' et f_2' sont des fonctions de E_1 dans $L(E_1;F)$ et de E_2 dans $L(E_2;F)$ respectivement. On sait que $L(E_1;F) \times L(E_2;F)$ est isomorphe à $L(E_1 \times E_2,F)$ (1.2.4). Sous quelles hypothèses a-t-on $f' = f_1' \oplus f_2'$?

PROPOSITION. Aux points (x,y) où $f_1'(x,y)$ et $f_2'(x,y)$ existent et où $y \rightsquigarrow f_1'(x,y)$ est continue (ou bien $x \rightsquigarrow f_2'(x,y)$), la fonction f est dérivable et l'on a

$$f'(x,y)(h,k) = f_1'(x,y)(h) + f_2'(x,y)(k).$$

Démonstration. $f(x+h,y+k)-f(x,y) = f(x+h,y+k)-f(x,y+k) + f(x,y+k) - f(x,y) = f_1'(x,y+k)(h) + f_2'(x,y)(k) + o(h) + o(k) = f_1'(x,y)(h) + f_2'(x,y)(k) + \left(f_1'(x,y+k) - f_1'(x,y)\right)(h) + o(h) + o(k)$. De la continuité de f_1' en la variable y résulte que $\left(f_1'(x,y+k) - f_1'(x,y)\right)(h)$ est un $o(h,k)$. En effet si $k \in B_2$ borné de E_2 et pour t assez petit, $f_1'(x,y + tk) - f_1'(x,y) \in \varepsilon H$ pour un certain H équiborné : $E_1 \to F$. Donc si h parcourt un borné B_1 de E_1, on a que :

$$\frac{\left(f_1'(x,y+tk) - f_1'(x,y)\right)(th)}{t} = \left(f_1'(x,y+tk) - f_1'(x,y)\right)(h) \in \varepsilon H(B_1)$$

et $H(B_1)$ est un borné de F .

<u>COROLLAIRE.</u> L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f'_1 et f'_2 existent et sont continues.

<u>Démonstration.</u> La dérivée f' est le composé :

$$E_1 \times E_2 \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{f'_1} L(E_1;F) \\ \xrightarrow{f'_2} L(E_2;F) \end{array} \right) \xrightarrow{\oplus} L(E_1 \times E_2;F)$$

de fonctions continues tandis que f'_1 par exemple est le composé :

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{f'} L(E_1 \times E_2;F) \longrightarrow L(E_1;F)$$

où la seconde application est l'application continue décrite en 1.2.4.

NOTE SUR LA PREMIERE PARTIE.

Frölicher et Bucher appellent infiniment petit une fonction r telle que $\theta r(\mathcal{V},\mathcal{B})$ tend vers zéro pour tout filtre $\mathcal{B}$ "quasi-borné", c'est-à-dire tel que $\mathcal{V}\mathcal{B} \to 0$. Les espaces E et F considérés ici étant localement bornés, la condition revient à celles qui sont données en 2.1.1 et celle-ci sont équivalentes à celle qui apparaît dans "Espaces à bornés et fonction différentiable" de Sebastião e Silva.

Cela étant, l'essentiel des chapitres 1 et 2 est la traduction du "Calculus" de Frölicher et Bucher dans le langage des réunions d'espaces normés qui est typique des espaces à bornés convexes. Je me suis écarté de Frölicher et Bucher à quelques reprises, par exemple en introduisant le concept de O(h), absent chez eux, et surtout dans le théorème sur les fonctions continues uniformément sur les bornés en 1.1.8.

Deuxième Partie.

LE CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

Dans toute cette partie, E, E_1, E_2,...,F et G désignent des espaces localement convexes séparés. Là où il est fait appel au calcul intégral (de 4.2.3 à la fin du chapitre 4, essentiellement), ces espaces sont en outre donnés comme quasi-complets.

CHAPITRE 3. LA DERIVEE DES FONCTIONS ENTRE ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

§ 1. LES NOTIONS DE DERIVEE.

0. Comme on l'a dit en 2.1.0, qui pourrait trouver sa place ici mot pour mot, définir une dérivée revient essentiellement à définir les infiniment petits.

LES INFINIMENT PETITS.

1. Soit p une semi-norme continue sur E . Notons E_p l'espace semi-normé que l'on obtient en considérant sur E la structure qui résulte de la semi-norme p. L'identité est continue : $E \to E_p$. On définit de même F_q à partir d'une semi-norme q continue sur F .

Considérons maintenant une application linéaire f entre les espaces vectoriels E et F . Elle est continue : $E \to F$ si et seulement si, pour toute semi-norme continue q sur F, il existe une semi-norme continue p sur E (en abrégé : $\forall$ q s.-n. pour F, $\exists$ p s.-n. pour E) telle que f soit continue : $E_p \to F_q$.

Donc dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E_p \arrow[r, "f"] & F_q \\ E \arrow[u] \arrow[r, "f"] & F \arrow[u] \end{tikzcd}$$

le concept de continuité des applications linéaires "remonte" à la ligne supérieure (avec le préfixe $\forall$q ..., $\exists$p ... :) ce qui ramène au concept de la continuité des applications linéaires entre espaces semi-normés.

On peut de la même manière définir un infiniment petit entre E et F à partir de la notion connue (définition classique de Fréchet) pour les espaces semi-normés E_p et F_q .

DEFINITION. Soit f une fonction de E dans F . On dit que f est un infiniment petit (F) ou que f(h) est un o(h) de type (F) lorsque pour toute semi-norme continue q sur F, il existe une semi-norme continue p sur E telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : p(h) \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad q\big(f(h)\big) \leqslant \varepsilon p(h) .$$

Cette définition est la première généralisation qui vienne à l'esprit de la définition de Fréchet pour les espaces normés. C'est en pensant au nom de Fréchet que Keller a choisi le sigle (F) dans "Differenzierbarkeit".

2. Si B est un disque borné de E, l'identité est bornée : $E_B \to E$ (c'est-à-dire continue : $E_B \to \beta E$). Une application linéaire de E dans F est bornée : $E \to F$ (ou continue : $\beta E \to \beta F$) ssi, pour tout disque borné B de E, il existe un disque borné C dans F tel que f est bornée : $E_B \to F_C$.

Ceci suggère un autre moyen de se ramener au cas des espaces normés, à savoir de "descendre" dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ E_B \arrow[u] \arrow[r, "F"] & F_C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

en utilisant un préfixe de la forme : $\forall B \ldots, \exists C \ldots$: comme dans la Première Partie. On retrouve ainsi la définition de Silva dans le "Calcul" :

DEFINITION. Soit f une fonction de E dans F. On dit que f est un infiniment petit (S) ou que f(h) est un o(h) de type (S) lorsque pour tout disque borné B dans E, il existe un disque borné C dans F tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t| \leqslant \delta \quad \text{et } h \in B \quad \Rightarrow f(th) \in \varepsilon t C .$$

On voit donc que la condition est exactement : f est un infiniment petit (au sens de 2.1.1 , c'est-à-dire de "Espaces à bornés et fonction différentiable" de Silva) du point de vue des e.b.c. associés βE et βF .

3. Il y a des variantes à ces définitions : reformulons la condition pour qu'une fonction soit un infiniment petit (F) :

$$\forall q \text{ s.-n. pour } F, \exists p \text{ s.-n. pour } E : \lim_{p(h)\to 0} \frac{q\big(f(h)\big)}{p(h)} = 0 .$$

Au lieu de prendre la limite du point de vue $p(h) \to 0$, on pouvait la prendre du point de vue $h \to 0$ dans la topologie de E, d'où le type (F') :

$$\forall q \text{ s.-n. pour } F, \exists p \text{ s.-n. pour } E : \lim_{h\to 0} \frac{q\big(f(h)\big)}{p(h)} = 0 .$$

soit encore :

$\forall q$ s.-n. pour F, $\exists p$ s.-n. pour E : $\forall \varepsilon > 0, \exists V$ voisinage de zéro dans E:

$$h \in V \quad \Rightarrow \quad q\big(f(h)\big) \leq \varepsilon\, p(h) .$$

Le concept obtenu est plus faible que le premier, lequel diffère par l'exigence que V soit de la forme $\{h \mid p(h) \leq \delta\}$.

4. Keller envisage encore dans son "Differenzierbarkeit" le cas où p est choisi indépendamment de q. Ainsi en changeant le préfixe pour "$\exists p$ ...: $\forall q$...," on obtient (F_o) et (F_o') à partir de (F) et (F'). Keller fournit des exemples à l'effet que (F_o) et (F_o') sont strictement plus forts que (F) et (F') respectivement.

5. Revenons à la définition de Silva pour en tirer aussi une variante. La condition peut se lire :

$$\lim_{t \not\to 0} \frac{f(th)}{t} = 0 \quad \text{en convergence de Mackey, de F,}$$

uniformément en h sur les bornés de E .

Sous cette forme une manière d'affaiblir la condition saute aux yeux. C'est ce que Keller appelle la condition (G_b), d'après le nom de Gâteaux parce qu'elle porte sur une limite.

$$\lim_{t \neq 0} \frac{f(th)}{t} = 0$$ dans la topologie de F, uniformément en h sur les bornés de E.

La condition (G_p) est celle que l'on obtient en supprimant l'exigence d'uniformité en h :

$$\lim_{t \neq 0} \frac{f(th)}{t} = 0$$ pour chaque h, dans la topologie de F .

La différence entre (S) et (G_b) disparaît si F est normé. On verra au paragraphe 3.2 d'autres espaces où cela a lieu, au moins pour certaines fonctions. D'autre part Keller montre comment (F') entraîne (G_b).

6. Les espaces localement convexes étant pseudo-topologiques au sens de Frölicher et Bucher, la définition de ces auteurs est applicable ici. Rappelons que si $\theta f(t,h)$ désigne $\frac{f(th)}{t}$, la condition s'écrit :

$$\forall \mathcal{F}, \mathcal{V}\mathcal{F} \to 0 \text{ dans } E \Rightarrow \theta f(\mathcal{V},\mathcal{F}) \to 0 \text{ dans } F .$$

En particulier, si B est borné, $\mathcal{V}B \to 0$ et donc $\theta f(\mathcal{V},B) \to 0$ pour une fonction f satisfaisant à la condition de Frölicher et Bucher que nous désignerons par (F & B). Ainsi (F & B) implique (G_b).

LES DERIVEES.

7. A chaque notion d'infiniment petit correspond une notion de dérivation et même deux comme nous le verrons dans un cas. Soit f une fonction de E dans F .

DEFINITION. La fonction f est dite dérivable (F) (respectivement (F'), (F_o), (F_o'), (F & B), (S), (G_b) et (G_p)) au point a si elle est définie au point a et s'il existe une application linéaire continue de E dans F, notée f'(a), telle que le reste

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)$$

soit un o(h) de type (F) (respectivement (F') et cetera).

DEFINITION. La fonction f est dite dérivable (β) au point a si elle est dérivable en ce point au sens de 2.1.5 comme fonction : $\beta E \to \beta F$.

8. La dérivabilité (S) ne coïncide pas avec la dérivabilité (β) en ce que dans le premier cas on demande que f'(a) soit une application linéaire continue $E \to F$ et seulement bornée (ou continue : $\beta E \to \beta F$) dans le second cas. La dérivabilité (S) implique donc la dérivabilité (β) laquelle n'implique évidemment aucune des autres puisqu'il existe des applications linéaires bornées non continues. Par contre la conjonction de (β) et (G_p) entraîne (S), (G_p) fournissant la continuité de f'(a) et (β) un o(h) de type (S). Pour le reste ces concepts de dérivabilité se comparent comme les notions d'infiniment petits qui servent à les définir. Dans le cas où E et F sont normés, tous les concepts de dérivée, sauf (G_p), sont équivalents. On trouvera encore à la fin de 4.2.14 une condition suffisante pour qu'une dérivée (G_p) soit dérivée (G_b)

Une fonction ne peut avoir qu'une seule dérivée. En effet on doit avoir :

$$f'(a)(h) = \lim_{t \to o} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

si f est dérivable en n'importe quel sens.

Nous abandonnerons ici (F_o), (F_o') et (F') moins importants. Nous ne parlerons pas plus de (F & B) qui fait l'objet du "Calculus" de Frölicher et Bucher. Rappelons que (β) est d'ailleurs (F & B) appliqué aux espaces à bornés convexes associés par le foncteur β . Restent donc (F), (β) et (S), (G_b) et (G_p).

PROPRIETES DE LA DERIVABILITE (F), (S), (β), (G_b) et (G_p).

9. On verra dans "Differenzierbarkeit" de Keller que les infiniment petits (F) sont continus à l'origine. Il en résulte qu'une fonction est continue aux points où elle est dérivable (F). Le résultat énoncé pour la dérivabilité (S) serait faux. Il existe (exemple 2) des fonctions dérivables (S), en un point qui ne sont pas continues en ce point pour les topologies des espaces E et F considérés. On a cependant, par 2.1.6., la continuité du point de vue des convergences de Mackey, c'est-à-dire la continuité : $\beta E \to \beta F$, ce que nous appellerons <u>continuité (β)</u> . Nous reviendrons en 3.2.3 sur ce problème de la continuité des fonctions dérivables (β) et (S). Ce même exemple montre qu'une fonction dérivable (G_b) n'est pas nécessairement continue.

10. La règle de dérivation des fonctions composées a été démontrée en 2.1.13 pour la dérivabilité (β). On se convaincra aisément que la règle vaut de même pour la dérivabilité (S). La règle se trouve dans l'article de Bastiani ou dans "Differenzierbarkeit" de Keller pour la dérivabilité (F).

Je ne sais pas si la règle vaut pour (G_p) et (G_b). Cependant dans le cas où l'on compose la fonction f de E dans F avec la représentation paramétrique $t \rightsquigarrow a + th$ du segment $[a,a+h]$ dans E, la règle est valable. Soit $g(t) = f(a+th)$. On a : $g(t+u) - g(t) = f'(a+th)(uh) + r(uh)$ où r est le reste de la dérivation de f au point a+th. Si r(h) est un o(h) de type (G_b) ou (G_p), r(uh) est un o(u) par définition.

COMPOSITION DES FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1$.

11. Nous désignerons par L(E;F) l'espace des applications linéaires continues de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de E. Quant à βE et βF, ce sont des e.b.c. et L(βE;βF) a le sens qu'il a déjà reçu en 1.2.1. Il résulte de 1.2.1 que l'e.b.c. βL(E;F) est un sous-espace de l'e.b.c. L(βE;βF).

On dira qu'une fonction f de E dans F est de <u>classe $\mathcal{C}^1$</u> sur un ensemble, si sa dérivée existe sur cet ensemble en un certain sens, et est continue : $E \to L(E;F)$. Le théorème de composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ fait défaut pour les raisons que l'on a dites dans l'introduction. On en a un "ersatz" par le biais des structures à bornés associées.

Soient f et g dérivables (β) de E dans F et de F dans G respectivement. Si f' est continue : $\beta E \to L(\beta E;\beta F)$ et g' : $\beta F \to L(\beta F;\beta G)$, alors $(g\circ f)'$ est continue : $\beta E \to L(\beta E;\beta G)$ par 2.2.3. En introduisant l'appellation <u>de classe $\beta\,\mathcal{C}^1$</u> pour de telles fonctions, ce résultat s'énonce comme suit :

<u>THEOREME.</u> Le composé de deux fonctions de classe $\beta\mathcal{C}^1$ est de classe $\beta\mathcal{C}^1$.

On trouvera en 4.2.9 & s.s. un exemple d'application de ce théorème.

DERIVEES PARTIELLES.

12. Le concept de dérivée (G_b) bénéficie d'un équivalent au résultat 2.2.7. sur les dérivées partielles.

Soit f une fonction de $E_1 \times E_2$ dans F. En supposant que les dérivées partielles existent, on est ramené, comme en 2.2.7, à considérer $\left(f_1'(x,y+k) - f_1'(x,y)\right)(h)$. C'est un $o(h,k)$ de type (G_b) si f_1' est continue dans sa deuxième variable au point (x,y). En effet la continuité de f_1' qui est à valeurs dans l'espace $L(E_1;F)$ muni de la convergence uniforme sur les bornés de E_1 veut dire que, pour voisinage de zéro U dans F et pour tout borné B_1 dans E_1, il existe un voisinage de zéro V dans E_1 tel que si $k \in V$,

$$\left(f_1'(x,y+k) - f_1'(x,y)\right)(h) \in U$$

uniformément on h dans le borné B_1 . Maintenant si B_2 est un borné de E_2 $tB_2 \subseteq V$ pour t assez petit. Donc

$$\frac{1}{t}\left(f_1'(x,y+tk) - f_1'(x,y)\right)(th) \in U$$

pour t assez petit, uniformément en h et k dans les bornés B_1 et B_2 .

C'est la continuité de f_1' qui est seule en cause ici. Il ne servirait à rien de supposer que f est partiellement dérivable (F), la démonstration donnée ne fournit jamais qu'un $o(h,k)$ de type (G_b).

Enonçons le résultat démontré ici :

<u>PROPOSITION.</u> Si f admet des dérivées partielles (G_b) continues, alors f est dérivable (G_b) et sa dérivée est donnée par la formule :

$$f'(x,y)(h,k) = f_1'(x,y)(h) + f_2'(x,y)(k) .$$

§ 2. RELATIONS ENTRE LA DERIVABILITE (β) ET LES TOPOLOGIES.

0. Des problèmes particuliers sont liés à l'utilisation des structures à bornés associées dans la dérivabilité (β) ou (S).

La différence entre dérivée (β) et dérivée (S) pour une fonction définie sur une partie de E disparaît si et seulement si E est bornologique, en effet une condition nécessaire et suffisante pour que E soit bornologique est que toute application linéaire bornée définie sur E soit continue.

Deux autres problèmes restent à traiter :

1° à quelles conditions un o(h) de type (G_b) est-il un o(h) de type (S) ?

2° à quelles conditions une fonctions dérivable (β) en un point est-elle continue en ce point pour les topologies des espaces considérés ?

Ces problèmes constituaient pour l'essentiel l'objet du premier paragraphe du "Calcul" de Silva.

LES INFINIMENT PETITS (β) et LES TOPOLOGIES.

1. Soit r une fonction de E dans F. Le problème que nous posons ne concerne que F . Considérons la condition :

$$\lim_{t \not\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0 \quad \text{uniformément en h sur les bornés de E.}$$

Le problème est : quand revient-il au même de prendre cette limite dans la topologie de F ou au sens de Mackey ?

THEOREME. Si F satisfait à la condition que ses bornés admettent une cobase dénombrable et à la condition de convergence de Mackey pour les suites (A.2.1.), alors tout infiniment petit (G_b) à valeurs dans F est un infiniment petit (S).

Notons $\mathcal{N}$ le filtre des $\{\frac{1}{n} \mid n \geq n_o\}$ pour tous les n_o entiers > 0 . Soit B un disque borné dans l'espace E .

<u>LEMME.</u> Le filtre $\theta r(\mathcal{V},B)$, évidemment plus fin que $\theta r(\mathcal{N},B)$ est moins fin que le filtre engendré par les enveloppes équilibrées des éléments de $2\ \theta r(\mathcal{N},B)$. Ces filtres ont donc les mêmes propriétés de convergence dans toute pseudotopologie localement convexe.

<u>Démonstration du lemme.</u> Soit A l'enveloppe équilibrée de $\{nr\ (\frac{x}{n}) \mid x \in B,\ n \geq n_o\}$ pour un certain n_o entier > 0 . On a ainsi pour $x \in B$ et $n \geq n_o$, $2nr\ (\frac{x}{n}) \in 2A$. Soit alors $|t| \leq \frac{1}{n_o}$ et $n \geq n_o$ tel que $\frac{1}{2n} \leq |t| \leq \frac{1}{n}$; il vient $x \in B \Rightarrow \frac{1}{t}\ r\ (\frac{x}{n}) \in 2A$. Par ailleurs de $|t|n \leq 1$ on tire $x \in B \Rightarrow tn\ x \in B$ d'où : $\frac{r(tx)}{t} = \frac{1}{t}\ r(\frac{tn\ x}{n}) \in 2\ A$.
Ainsi 2A contient l'élément :

$$\left\{ \frac{r(tx)}{t} \;\middle|\; |t| \leq \frac{1}{n_o}\ ,\ x \in B \right\}$$

de $\theta r(\mathcal{V},B)$.

<u>Démonstration du théorème.</u> Dans la topologie de F, $\lim\limits_{t\to o} \frac{r(tx)}{t} = 0$ entraîne $\lim\limits_{n\to\infty} nr(\frac{x}{n}) = 0$. On est donc ramené au cas d'un filtre à base dénombrable tendant vers 0 dans une topologie qui satisfait aux hypothèses de A.2.3. Ainsi $n\ r(\frac{x}{n})$ tend vers zéro en convergence de Mackey uniformément en x sur les bornés et donc aussi $\frac{r(tx)}{t}$ en vertu du lemme.

Un espace métrisable vérifie la condition de convergence de Mackey pour les suites mais supposer en outre qu'il a suite fondamentale de bornés est presque trivialisant : si l'espace est complet c'est un Banach.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées dans les espaces de Silva (A.5.3). On trouve dans Kantorovich et Akilov (XI.5), outre l'exemple des espaces de Silva, le cas de l'union localement convexe d'une suite croissante d'espaces normés E_n telle que l'injection $E_n \to E_{n+1}$ soit un homéomorphisme sur un sous espace fermé.

2. La dérivée (β) en un point est bornée. Par conséquent chaque fois que l'on dérive (β) une fonction bornée sur les bornés, on considère un reste borné sur les bornés. A ces fonctions on peut appliquer le théorème suivant qui vaut, entre autres, pour les espaces métrisables.

THEOREME. Si F satisfait à la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés (A.2.1), alors tout infiniment petit (G_b) à valeurs dans F et borné sur les bornés est un infiniment petit (S).

Démonstration. Dans la topologie de F, $\lim_{n\to\infty} n\, r(\frac{h}{n}) = 0$ uniformément en h sur les bornés de E . Cela revient à dire que la suite des fonctions $r_n : h \rightsquigarrow nr(\frac{h}{n})$ tend vers zéro dans l'espace des fonctions bornées sur les bornés de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés. Une suite tendant vers zéro dans un e.l.c. est bornée. Dire que la suite r_n est bornée implique que pour tout borné B de E, $\{nr(\frac{h}{n}) \mid h \in B,\ n>0\}$ est un borné de F . Le filtre $\theta r(\mathcal{N},B)$ est ainsi, pour tout borné B, un filtre borné. Il tend vers zéro pour la convergence de Mackey, et donc aussi $\theta r(\mathcal{N},B)$ en vertu du lemme.

On trouve un exemple d'application de ce théorème dans l'exemple 1, 3°,b.

Dans son "Calcul", Sebastião e Silva affirme que les infiniment petits (G_b) et (S) sont les mêmes lorsque l'espace où ils prennent leurs valeurs vérifie à la fois la condition que les bornés admettent une suite fondamentale et la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés. Nous avons vu que ces hypothèses excluent les espaces métriques complets (3.2.1). En présence de la première condition, la seconde est inutilement restrictive (3.2.1). La seconde condition, seule, n'est pas suffisante (exemple 3).

LA CONTINUITE DES FONCTIONS DERIVABLES (β) .

3. Une fonction dérivable (β) en un point est de l'ordre de l'accroissement en ce point :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + r(h).$$

où $r(h)$ est un $o(h) : \beta E \to \beta F$ donc un $O(h) : \beta E \to \beta F$ et où $f'(a)(h)$ est linéaire bornée en h donc aussi un $O(h)$. Une manière de montrer qu'une fonction dérivable (β) en un point est continue en ce point est de montrer que les $O(h) : \beta E \to \beta F$ sont continus $E \to F$. Or on sait (2.1.11, Corollaire 2°) que l'image inverse d'un voisinage de zéro de F, image inverse d'un bornivore est bornivore.

<u>THEOREME.</u> Si dans l'espace E tout bornivore est voisinage de zéro, toute fonction de E dans F est continue aux points où elle est dérivable (β) .

C'est le cas en particulier si E est métrisable.

4. Les fonctions dérivables (β) en un point y sont continues (β) . Le problème est donc également résolu dans les espaces où la continuité : $\beta E \to \beta F$ entraîne la continuité : $E \to F$. Admettons que le point considéré soit l'origine. Si f est continue à l'origine : $\beta E \to \beta F$, elle l'est aussi : $\beta E \to F$ c'est-à-dire $E_B \to F$ pour tout disque borné B . Si la topologie de E est la topologie finale associée aux injections $E_B \to E$, f est continue : $E \to F$.

<u>THEOREME.</u> Si la topologie de E est la topologie finale associée aux injections $E_B \to E$, toute fonction de E dans F est continue aux points où elle est dérivable (β) .

C'est le cas si E est un espace de Silva (A.5.2).

CHAPITRE 4. LES CONSEQUENCES DU THEOREME DE LA MOYENNE.

§ 1. LE THEOREME DE LA MOYENNE ET SES PREMIERES APPLICATIONS.

a. Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, (G_p) équivaut à (F) et (β) à (S). Nous parlerons de dérivée, dérivable, ... etc. dans le premier cas et dérivée (β), dérivable (β), ... etc. dans le second. D'autre part nous dirons "presque partout" pour "sauf un ensemble dénombrable".

THEOREME DE LA MOYENNE.

1. Frölicher et Bucher donnent dans leur "Calculus" un remarquable "théorème fondamental" pour le calcul différentiel. Nous nous contenterons ici de son énoncé, la démonstration donnée aux pp. 51 à 57 du livre de Frölicher et Bucher étant accessible sans difficulté sauf tout au plus de notations ou de vocabulaire.

THEOREME (Frölicher & Bucher). Soient f une application continue d'un intervalle $[a,b]$ de la droite réelle dans E et φ une application continue et croissante sur le même intervalle et à valeurs réelles. Soit D un convexe fermé de E . Si f' et φ' existent presque partout et si

$$f'(t) \in \varphi'(t)D \quad \text{pour presque tout } t \in [a,b],$$

alors

$$f(b) - f(a) \in \big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)\, D\ .$$

En faisant $\varphi(t) = t$ on trouve un résultat fort proche de la formule des accroissements finis :

COROLLAIRE (Théorème de la moyenne). Soient f une application continue d'un intervalle $[a,b]$ de la droite réelle dans E, presque partout dérivable, et D un convexe fermé de E . Si

$$f'(t) \in D \quad \text{pour presque tout } t \in [a,b],$$

alors

$$f(b) - f(a) \in (b-a)D .$$

En faisant $\varphi'(t) = 0$ on trouve la condition habituelle pour qu'une fonction soit constante :

COROLLAIRE (Théorème de constance). Soit f une application continue de l'intervalle $[a,b]$ dans E, presque partout dérivable. Si $f'(t) = 0$ presque partout, alors f est constante sur $[a,b]$.

Il est remarquable que le théorème de la moyenne qui découle ainsi du théorème de Frölicher et Bucher est beaucoup plus proche de la formule des accroissements finis que l'inégalité classique dans les espaces normés. La différence évidente est que l'inégalité portant sur la norme ne fournit que des multiples de la boule unité alors que D est un convexe fermé quelconque (non nécessairement un disque) chez Frölicher et Bucher.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle dérivable sur $[0,1]$. La formule des accroissements finis affirme que

$$f(1) - f(0) \in \{f'(x) \mid x \in [0,1]\}.$$

Le théorème de la moyenne donne :

$$f(1) - f(0) \in \overline{\{f'(x) \mid x \in [0,1]\}}$$

Le théorème classique dans les espaces normés dit seulement que :

$$f(1) - f(0) \in [-a, +a]$$

si a est le supremum de f' sur $[0,1]$. La différence est d'importance si les $f'(x)$ sont grands.

PRIMITIVES.

2. Pour n'avoir pas à répéter la clause selon laquelle on tolère une infinité dénombrable de points exceptionnels, nous allons l'inclure dans la définition suivante.

DEFINITION. Soient f et g des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans E. On dit que f est primitive de g sur $[a,b]$ si f et g sont définies presque partout sur $[a,b]$ et si l'on a, pour presque tout $t \in [a,b]$, $f'(t) = g(t)$.

3. Quant au problème de l'existence de primitives, on dispose du théorème suivant :

THEOREME. Soient f_n et g_n des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace complet E. Si les fonctions g_n admettent comme primitives sur $[a,b]$ des fonctions f_n et si celles-ci sont continues, si la suite (g_n) admet une limite uniforme g et si la suite $(f_n(c))$ converge pour un certain $c \in [a,b]$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers une limite f qui est primitive de g.

Démonstration. La suite (g_n) est uniformément de Cauchy. Donc si V est un disque fermé voisinage de zéro dans E, on a $g_n(t) - g_m(t) \in V$ dès que m et n dépassent un certain n_0, et ce uniformément en t. Par le théorème de la moyenne, il suit que

(1) $$f_n(t+h) - f_m(t+h) - f_n(t) + f_m(t) \in hV .$$

On va voir que la suite (f_n) est Cauchy uniforme. On sait que, pour n assez grand (disons plus grand que le même n_0), $f_n(c) - f_m(c) \in V$. Alors il suit de (1) que, pour tout h tel que $c + h \in [a,b]$,

$$f_n(c+h) - f_m(c+h) \in (b-a)V + V .$$

On va voir que $g(t) = f'(t)$ en tout point t où $g_n(t) = f'_n(t)$ pour chaque n . En passant à la limite en m dans (1) il vient :

(2) $$f(t+h) - f_n(t+h) - f(t) + f_n(t) \in hV .$$

Fixons $n \geqslant n_o$. Pour h assez petit

(3) $$f_n(t+h) - f_n(t) - g_n(t)\, h \in hV$$

et nous supposerons que n_o est assez grand pour que

(4) $$g_n(t) - g(t) \in hV .$$

En additionnant (2), (3) et (4) on obtient :

$$f(t+h) - f(t) - g(t)\, h \in 3hV .$$

<u>Remarque.</u> Dans bien des cas la suite f_n ne sortira pas d'un même borné de E. Il suffira alors évidemment de supposer E quasi-complet.

CONTINUITE UNIFORME SUR LES BORNES DES FONCTIONS DERIVABLES.

4. Une fonction est continue $\beta E \to \beta F$ aux points où elle est dérivable (β) (2.1.6). Pour obtenir la continuité uniformément sur les bornés, on va utiliser celle de f'.

<u>PROPOSITION.</u> Si f est de classe $\mathcal{E}^1 : \beta E \to \beta F$ sur un ensemble convexe A, elle est de classe $\mathcal{E}^0 : \beta E \to \beta F$ sur A .

<u>Démonstration.</u> Considérons l'égalité :

(1) $$f(x+h) - f(x) = f'(x)(h) + r(x,h)$$

où $r(x,h)$ désigne un $o(h)$ de type (S).

Le problème est d'évaluer la limite au sens de Mackey du premier membre de (1) soit, plus précisément, la limite dans βF de $\Delta_B f(\mathcal{F})$ avec B borné $\subseteq A$ et $\mathcal{F} \to 0$ dans βE .

Comme f' est $\mathcal{E}^\circ$, f'(B) est borné (1.1.8), c'est-à-dire un ensemble équicontinu : $\beta E \to \beta F$ d'applications linéaires, et donc $f'(B)(\mathcal{F}) \to 0$ dans βF. La question du premier terme dans le second membre de (1) est réglée.

Reste à calculer lim r(x,h) selon $\mathcal{F}$ en h et uniformément en x dans B. Considérons la fonction $g(t) = r(x,th) = f(x+th) - f(x) - f'(x)(th)$ sur $[0,1]$. On a $g'(t) = \big(f'(x+th) - f'(x)\big)(h)$ en vertu de 3.1.10. Soit D l'enveloppe convexe fermée des g'(t) pour $t \in [0,1]$. En vertu du théorème de la moyenne, $g(1) \in D$, c'est-à-dire $r(x,h) \in D$.

Revenons à $\mathcal{F}$ et B. Le filtre $r(B,\mathcal{F})$ engendré par les ensembles $\{r(x,h) \mid x \in B,\ h \in V\}$ où $V \in \mathcal{F}$ est plus fin que le filtre engendré par les enveloppes convexes fermées des

$$\{f'(x+th) - f'(x)(h) \mid x \in B,\ h \in V,\ t \in [0,1]\} \quad (V \in \mathcal{F}).$$

Or, en vertu de l'axiome (iv.a) de 0.2.1, on peut supposer V équilibré donc le filtre $r(B,\mathcal{F})$ est plus fin que le filtre des enveloppes convexes fermées des :

$$\{\big(f'(x+h) - f'(x)\big)(k) \mid x \in B,\ h \in V,\ k \in W\} \qquad (V \text{ et } W \in \mathcal{F}).$$

Ces ensembles forment le filtre $\Delta_B f'(\mathcal{F})(\mathcal{F})$. Comme f' est $\mathcal{E}^\circ$, $\Delta_B f'(\mathcal{F}) \to 0$ dans $L(\beta E;\ \beta F)$. Alors, par la continuité de $\beta E \times L(\beta E;\beta F) \to \beta F$, $\Delta_B f'(\mathcal{F})(\mathcal{F}) \to 0$ dans βF.

COMPOSITION DES FONCTIONS CONTINUEMENT DERIVABLES.

5. Le résultat qui précède a pour conséquence immédiate de permettre de démontrer un théorème de composition pour la classe $\mathcal{E}^1$.

<u>THEOREME</u>. Le composé de deux fonctions de classe $\mathcal{E}^1$ est de classe $\mathcal{E}^1$, du moins si la première fonction est considérée sur un ensemble convexe.

L'argument est celui de 2.2.3. Remarquons qu'il s'agit ici de fonctions entre e.l.c. séparés.

§ 2. FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE QUI "NE SONT PAS VRAIMENT" A VALEURS DANS LES E.L.C. GENERAUX.

1. Une application continue f d'un intervalle $[a,b]$ dans E prend toujours ses valeurs dans un E_B (B disque borné) puisque l'image est compacte donc bornée. La question est : quand f est-elle continue : $[a,b] \to E_B$?
Si f a une dérivée, une dérivée continue, etc..., comme fonction à valeurs dans E, en est-il de même comme fonction à valeurs dans un E_B ?

On obtient une première réponse en faisant une hypothèse sur E .

THEOREME. Si E vérifie la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$: $[a,b] \to E$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$: $[a,b] \to E_B$ pour un certain disque borné B ($n \geq 0$).

Démonstration. 1° Le filtre $\Delta_{[a,b]} f(\mathcal{V})$ des $f(x+h) - f(x)$ est un filtre borné (du fait de l'uniforme continuité de f) tendant vers zéro. Il tend donc vers zéro dans un certain E_B .

2° Si f est dérivable et f' est continue, le filtre $q([a,b], \mathcal{V})$ des $q(x,h) = \dfrac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h}$ est un filtre borné tendant vers zéro. En effet posons $g(t) = f(x+th) - f(x) - th\, f'(x)$.
On a $g'(t) = hf'(x+th) - hf'(x) \in hD$ si D est l'enveloppe convexe fermée des $f'(x+th) - f'(x)$ pour $t \in [0,1]$ (x et h fixés). On en tire que $\dfrac{g(1)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h} \in D$ et la continuité de f' étant uniforme, la convergence l'est aussi, en $x \in [a,b]$.

3° Enfin, si f est de classe $\mathcal{C}^n$, on démontre par le 1° et le 2° que $f^{(n)}$ est continue, et que c'est la dérivée de $f^{(n-1)}$, du point de vue d'un certain E_B .

Ainsi il n'y a pas de fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace métrisable, par exemple, qui ne soit plus simplement de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace normé. On trouvera un résultat de ce genre pour les fonctions limites uniformes de fonctions en escalier en A.6.7.

2. Au lieu de faire des hypothèses sur E, on peut utiliser la différentiabilité de la fonction. On consomme un ordre de différentiabilité dans l'opération.

<u>THEOREME.</u> Une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1} : [a,b] \to E$ est aussi une fonction de classe $\mathcal{C}^n : [a,b] \to E_B$ pour un certain disque borné B ($n \geq 0$).

<u>Démonstration.</u> De $f^{(n+1)}$ on utilise pas vraiment la continuité mais seulement le fait que c'est une fonction bornée. Soit B un disque borné contenant $f^{(n+1)}([a,b])$. On en tire :

(1) $$f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) \in hB$$

et la continuité de $f^{(n)}$ en résulte : $[a,b] \to E_B$.

Ensuite $f^{(n)}$ est la dérivée : $[a,b] \to E_B$ de $f^{(n-1)}$. Posons $g(t) = f^{(n-1)}(x+th) - f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x)th$. On a $g'(t) = hf^{(n)}(x+th) - hf^{(n)}(x) \in th^2B$ par (1). Donc : $g(1) - g(o) = f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) - hf^n(x) \in \frac{1}{2}h^2B$ qui est $o(h)$ dans E_B.

CONTINUITE ET DERIVABILITE DE L'INTEGRALE.

3. THEOREME. Soit f une fonction réglée sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace quasi-complet E. L'intégrale $\int_a^t f$ dépend continuement sur $[a,b]$ de la limite supérieure d'intégration t.

Les définitions relatives au calcul intégral sont données en A.6. Elles supposent quel'espace est quasi-complet ce que nous admettrons par convention jusqu'à la fin du chapitre 4.

Démonstration. Les fonctions réglées sont bornées. Soit B un borné contenant $f([a,b])$. La différence de $\int_a^t f$ s'évalue comme suit (A.6.5) :

$$\int_t^{t+h} f \in \int_t^{t+h} B = hB$$

ce qui tend bien vers zéro.

Remarque. On démontre en réalité la continuité dans E_B . Ce résultat est à rapprocher de celui donné en 4.2.2.

4. THEOREME. L'intégrale $\int_a^t f$ est primitive sur $[a,b]$ de la fonction f réglée sur $[a,b]$.

Démonstration. 1° L'intégrale d'une fonction en escalier, comme fonction de la limite supérieure d'intégration, est continue et évidemment primitive de l'intégrand.

2° La fonction f est limite uniforme de fonctions en escalier f_n dont des primitives sont les $\int_a^t f_n$. Il suit de 4.1.3 que f a pour primitive la fonction $\int_a^t f$ qui est par définition la limite des $\int_a^t f_n$.

5. Lorsque f est continue, on obtient, plus simplement, un meilleur résultat.

THEOREME. L'intégrale $\int_a^t f$ d'une fonction f continue sur $[a,b]$ admet f(t) pour dérivée en chaque $t \in [a,b]$. Si f est continue : $[ab] \to \beta E$, elle est même la dérivée (β) de son intégrale.

Démonstration. Il nous faut estimer la différence de l'intégrale. On a :

$$\int_t^{t+h} f(s)\,ds = f(t)h + \int_t^{t+h} \big(f(s) - f(t)\big)\,ds \quad .$$

On distingue évidemment une partie linéaire $f(t)h$. Reste à voir que la dernière intégrale est un $o(h)$.

1° Si f est continue $[a,b] \to \beta E$, il existe un disque borné fermé B tel que $f(s) - f(t) \in \varepsilon B$ pour h assez petit. Alors

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \big(f(s) - f(t)\big)\,ds \in \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varepsilon B = \varepsilon B \quad .$$

2° Si f est continue $[a,b] \to E$, pour tout voisinage V de 0 disque fermé, on a $f(s) - f(t) \in V$ pour h assez petit. Alors :

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \big(f(s) - f(t)\big)ds \in \frac{1}{h}\int_t^{t+h} V = V$$

6. THEOREME. Si une fonction f continue sur $[a,b]$ est primitive sur $[a,b]$ d'une fonction g réglée sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b g = f(b) - f(a) \quad .$$

Démonstration. L'intégrale $\int_a^t g$ est une primitive continue de g (4.2.3 et 4). Donc $f(t) - \int_a^t g$ est une primitive continue de la fonction nulle. Cette différence est donc constante et on calcule que la constante est $f(a)$.

REGLE D'INTEGRATION PAR PARTIES.

7. La règle d'intégration par parties découle évidemment de 4.2.6.

PROPOSITION. Si f et φ sont de classe C^1 sur $[a,b]$ à valeurs dans E et R respectivement, on a la formule :

$$\int_a^b \varphi'(t)f(t)\,dt = \big[\varphi(t)\ f(t)\big]_a^b - \int_a^b \varphi(t)f'(t)\,dt$$

où le crochet désigne la différence habituelle.

Bibliothèque des Sciences Exactes

Démonstration. Les fonctions $(\varphi f)'$, $\varphi' f$ et $f'\varphi$ sont intégrables parce que continues. Pour le reste il suffit de disposer de la règle de dérivation $(\varphi f)' = \varphi' f + f'\varphi$. Cette règle, comme en 2.1.4, découle de la règle pour une fonction de fonction et du fait que la multiplication par les scalaires est bilinéaire continue et donc $\mathcal{C}^\infty$.

INTEGRATION PAR SUBSTITUTION.

8. PROPOSITION. Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ avec $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$. Alors :

$$\int_a^b f(s)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du \quad .$$

Démonstration. Les fonctions $\int_a^{\varphi(t)} f(s)\ ds$ et $\int_\alpha^t f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont continues (4.2.3) et ont la même dérivée (4.2.5). Comme elles coïncident pour $t = \alpha$, elles sont égales.

INTEGRATION LE LONG D'UNE COURBE D'UNE FONCTION DE VARIABLE VECTORIELLE.

9. Dans le cas de fonctions de variable vectorielle il est raisonnable de chercher d'abord à intégrer des fonctions à valeurs dans un espace d'applications linéaires puisque, dans une certaine mesure, l'intégrand doit jouer le rôle de dérivée pour l'intégrale.

Soit f une fonction de E dans l'espace $L(\beta E;\beta F)$ des applications linéaires bornées de E dans F. Nous l'intégrons sur un arc γ de classe $\beta\mathcal{C}^1$ dans E. Nous supposerons pour ce faire que f est continue :
$\beta E \to L(\beta E;\beta F)$. On verra de suite l'intérêt de cette hypothèse. Notons encore γ une représentation paramétrique de l'arc γ sur $[0,1]$.
L'hypothèse sur γ est la continuité de $\gamma' : [0,1] \to \beta E$. Nous avons à nous assurer que la fonction :

$$(f\circ\gamma)\ \gamma' \ :\ t \rightsquigarrow f\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)$$

est intégrable. C'est le composé

$$\left.\begin{array}{ccc} & \beta E \xrightarrow{\ f\ } & L\ (\beta E;\beta F) \\ \gamma\nearrow & & \\ [0,1] & \xrightarrow{\ \gamma'\ } & \beta E \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{évaluation}} \beta F$$

de fonction β- continues. Le composé est β-continu donc a fortiori continu. Ainsi c'est pour bénéficier de 1.2.3 que nous avons choisi d'utiliser les structures à bornés associées.

<u>DEFINITION</u>. Nous appellerons <u>intégrale de</u> f <u>sur l'arc</u> γ le vecteur

$$\int_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt$$

dans F que nous noterons aussi ;

$$\int_\gamma f \qquad \text{ou} \qquad \int f\circ\gamma\ d\gamma$$

L'intégrale qui intervient dans la définition a un sens mais il reste à vérifier qu'elle ne dépend pas de la représentation paramétrique particulière de l'arc γ . Soit δ une représentation paramétrique sur $[a,b]$ équivalente à γ au sens que le changement de paramètre $\varphi = \delta^{-1}\circ\gamma$ est un difféomorphisme de classe C^1 croissant : $[0,1] \to [a,b]$.

On a donc :

$$\int_a^b f\big(\delta(s)\big)\ \big(\delta'(s)\big)ds = \int_0^1 f\Big(\delta\big(\varphi(t)\big)\Big)\ \Big(\delta'\big(\varphi(t)\big)\ \big(\varphi'(t)\big)\Big)\ dt$$

$$= \int_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\ \big(\gamma'(t)\big)\ dt$$

en vertu de la formule du changement de variable 4.2.8.

On notera aussi souvent $\int_a^{a+h} f$ l'intégrale de f sur le segment orienté qui joint les points a et a+h de E et qui admet : $t \rightsquigarrow a + th$ comme représentation paramétrique sur $[0,1]$.

10. On va maintenant obtenir la différence d'une fonction f comme intégrale de sa dérivée.

THEOREME. Soit γ un arc orienté de classe $\beta\mathcal{C}^1$ dans E, dont les extrémités sont a et b, et f une fonction de classe $\beta\mathcal{C}^1$ de E dans F. Alors

$$\int_\gamma f' = f(b) - f(a) .$$

Démonstration. On a $\int_0^1 f'\big(\gamma(t)\big)\,\big(\gamma'(t)\big)dt = \int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)dt$

$$= (f\circ\gamma)(1) - (f\circ\gamma)(0) \quad \text{par } 4.2.6.$$

On a en particulier, avec ces hypothèses sur f, que $\int_a^b f = f(b) - f(a)$.

11. Ayant égalé la différence à l'intégrale de la dérivée, on a sans coup férir un résultat en forme de théorème de la moyenne pour les fonctions de classe $\beta\mathcal{C}^1$.

THEOREME. Soient a et a+h des points de E et f une fonction de E dans F qui soit de classe $\beta\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,a+h]$. Si le convexe fermé B contient $f'(a+th)(h)$ pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$f(a+h) - f(a) \in B .$$

Démonstration. $f(a+h) - f(a) = \int_a^{a+h} f = \int_0^1 f'(a+th)(h)dt$ et le résultat est fourni par A.6.5.

COROLLAIRE. Une fonction de classe $\beta\mathcal{C}^1$ sur un ensemble convexe est bornée sur [resp : les bornés de] ce convexe lorsque sa dérivée l'est.

Démonstration. Soit D un convexe, que nous écrirons $a+B$ ($a\in D$, $B = D-a$), tel que f soit définie sur $a+B$. Supposons que $f'(a+B)$ est borné et soit C l'enveloppe convexe fermée de $f'(a+B)(B)$. Il vient $f(a+B) \subseteq f(a) + C$.

12. Inversément on peut donner un équivalent en variable vectorielle à 4.2.5.

<u>THEOREME.</u> Si la fonction g est continue sur un convexe A : $\beta E \to L(\beta E;\beta F)$ et si :

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} g$$

pour tous x et $x+h \in A$, alors g est la dérivée (β) de f sur A.

<u>Démonstration.</u> On a $f(x+h) - f(x) = \int_0^1 g(x+th)(h)dt$ $= g(x)(h) + \int_0^1 \big(g(x+th) - g(x)\big)(h)\,dt$. Appelons $r(h)$ ce dernier terme.
La continuité de g s'exprime par :

$$\forall B \text{ d.b. de } E,\ \exists H \text{ d.b. de } L(\beta E;\beta F) : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$$
$$k \in \delta B \Rightarrow g(x+k) - g(x) \in \varepsilon H .$$

Alors pour $h \in B$ et si C est un disque borné dans F contenant $H(B)$, on a, pour $|u| \leq \delta$, $\big(g(x+tuh) - g(x)\big)(h) \in \varepsilon C$ d'où :
$\int_0^1 \big(g(x+tuh- - g(x)\big)(h)\,dt \in \varepsilon C$. Ainsi $\frac{r(uh)}{u}$ tend vers zéro uniformément sur les bornés de E.

CHANGEMENT DE VARIABLE.

12. <u>PROPOSITION.</u> Soient γ un arc de classe $\beta\mathcal{C}^1$ dans E et φ une fonction de E dans F de classe $\beta\mathcal{C}^1$ sur γ au moins. Appelons $\varphi\circ\gamma$ l'arc de classe $\beta\mathcal{C}^1$ obtenu dans F en composant avec φ les représentations paramétriques de γ . Si f est une fonction de classe $\beta\mathcal{C}^1$ de F dans $L(\beta G;\ \beta G)$, on peut écrire :

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f = \int_\gamma (f\circ\varphi)\varphi'$$

<u>Démonstration.</u> L'égalité résulte des égalités successives ci-deseous. Chaque intégrale est suivie d'un diagramme sur lequel on lit le sens de l'intégrand et comment il est continu et donc intégrable.

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f = \int_0^1 f\big(\varphi\circ\gamma(t)\big)\ \big((\varphi\circ\gamma)'(t)\big)\ dt$$

$$\left.\begin{array}{ccc} & \beta F & \xrightarrow{\ f\ } L(\beta F;\beta G) \\ \varphi\circ\gamma & \uparrow & \\ & [0,1] & \xrightarrow{\ (\varphi\circ\gamma)'\ } \beta F \end{array}\right\} \longrightarrow \beta G$$

$$= \int_0^1 (f\circ\varphi)\big(\gamma(t)\big)\ \big(\varphi'(\gamma(t))\ \ \big(\gamma'(t)\big)\quad dt$$

$$\left.\begin{array}{ccc} & \beta E & \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{\ f\circ\varphi\ } L(\beta G;\beta G) \\ \xrightarrow{\ \varphi'\ } L(\beta E;\beta F) \end{array}\right) \longrightarrow \beta F \\ \gamma & \nearrow & \\ [0,1] & \xrightarrow{\ \gamma\ } & \beta E \end{array}\right\} \longrightarrow \beta G$$

$$= \int_0^1 \big((f\circ\varphi)\ \varphi'\big)\big(\gamma\ (t)\big)\ \big(\gamma'(t)\big)\ dt \ = \int_\gamma (f\circ\varphi)\varphi'$$

$$\left.\begin{array}{ccc} & \beta E & \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{\ f\circ\varphi\ } L(\beta F;\beta G) \\ \xrightarrow{\ \varphi'\ } L(\beta E;\beta F) \end{array}\right) \longrightarrow L(\beta E;\beta G) \\ \gamma & \nearrow & \\ [0,1] & \xrightarrow{\ \gamma'\ } & \beta E \end{array}\right\} \longrightarrow \beta G$$

INTEGRALE ET DERIVEE (G_p) OU (G_b).

14. On a vu en 4.2.9 les problèmes que pose la définition de l'intégrale le long d'une courbe. Nous avons prouvé que $f\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)$ était une fonction intégrable en la ramenant à un composé de fonctions β-continues. Ceci pour un arc γ général.

Dans le cas où $\gamma(t) = a+th$, $f\big(\gamma(t)\big)\ \big(\gamma'(t)\big) = f(a+th)\ (h)$ qui est une fonction continue de t si f est continue. En effet, dans le cas des e.l.c., l'évaluation $L(E;F) \times E \to F$ est séparément continue. Si f est continue : $E \to L(E;F)$, $t \rightsquigarrow f(a+th)$ est continue : $R \to L(E;F)$ et (h étant fixé) $t \rightsquigarrow f(a+th)(h)$ est continue : $R \to F$. L'intégrale $\int_0^1 f(a+th)(h)dt$ a donc un sens et peut servir de définition à $\int_a^{a+h} f$ lorsque f est seulement continue pour les topologies de E et L(E;F).

Alors 4.2.6 fournit un résultat comparable à 4.2.10 :

$$\int_a^{a+h} f' = f(a+h) - f(a)$$

si f est de classe C^1 de type (G_p) sur le segment.

Inversément si g est continue : $E \to L(E;F)$ et si

$$\int_x^{x+h} g = f(x+h) - f(x)$$

sur un convexe A, alors g est la dérivée (G_b) de f sur A . En effet il résulte de la continuité de g, par le même raisonnement qu'en 3.1.12, que si B est un borné de E et U un voisinage de zéro dans F,

$$\big(g(x+tu\ h) - g(x)\big)\ (h) \in U$$

pour u assez petit, uniformément en $h \in B$. De là on tire que :

$$\frac{1}{u} \int_0^1 \big(g(x + tu\ h) - g(x)\big)\ (uh)dt \in U \quad .$$

On voit donc au passage que si la dérivée (G_p) est continue sur un convexe, c'est une dérivée (G_b).

§ 3. DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR.

1. Nous savons que $L(\beta E; L(\beta E;\beta F))$ est isomorphe à $L^2(\beta E;\beta F)$ (1.2.5). On n'a rien de semblable pour les espaces $L(E;L(E;F))$ et cetera. Plus préeisément (Grothendieck, "E.V.T.", p.154) les applications bilinéaires qui correspondent canoniquement aux éléments de $L(E;L(E;F))$ sont, par définition, les applications bilinéaires hypocontinues relativement aux bornés en la première variable. On sait (ibidem) que ces applications sont continues sur les produits $B \times E$, B borné dans E .

DERIVATIONS SUCCESSIVES.

2. Il n'est pas interdit pour autant de dériver plusieurs fois. Ainsi la dérivée seconde (S), (F) ou (G_b) d'une fonction f de E dans F est une fonction f'' de E dans $L(E;L(E,F))$. Dans le cas de la dérivée seconde (β) on obtient une fonction à valeurs dans $L^2(\beta E;\beta F)$ par l'identification canonique. Cela étant dit les dérivées d'ordre supérieur sont définies par dérivations successives comme en 2.2.1.

Comme la dérivabilité (G_b) n'entraîne pas la continuité, on n'est pas sûr qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au sens (G_b) sera de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, à moins qu'on l'impose dans la définition, ce que nous ferons.

DEFINITION. Supposons définie $f^{(n-1)}$ la dérivée $(n-1)^e$ de f au sens (G_b), (F), (S) ou (β) . On dit que f est n fois dérivable (G_b) etc., sur l'ensemble A si $f^{(n-1)}$ est dérivable (G_b), etc., sur A . La dérivée n^e, $f^{(n)}$, est la dérivée de $f^{(n-1)}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ au sens (G_b),etc., si elle est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue.

SYMETRIE DE LA DERIVEE SECONDE EN UN POINT.

PROPOSITION. Soit f une fonction dérivable (G_p) dans un ensemble convexe

et dont la dérivée f' admet elle-même une dérivée (G_p) f"(a) en un point a de cet ensemble. Alors f"(a)(h,k) est symétrique en h et k.

Démonstration. Posons g(u) = f(a+tuh+tk) - f(a+tuh) pour tout u $\in |-1,1|$ où h,k $\in$ E et t réel, momentanément fixés, sont tels que l'expression ait un sens. On tire de 3.1.10 que g'(u) = f'(a+tuh+tk)(th) - f'(a+tuh)(th). En dérivant alors f' au point a il vient :

$$g'(u) = \big(f''(a)(tuh+tk) + r(tuh+tk)\big)(th) - \big(f''(a)(tuh) + r(tuh)\big)(th)$$

où r(x) = f'(a+x) - f'(a) - f"(a)(x) est un o(x) de type (G_p) à valeurs dans L(E;F). On a en particulier $\lim \frac{r(tx)}{t} = 0$ uniformément en x sur le borné $\big([-1,1]h + [-1,1]k\big) \cup \big([1,1]h\big)$. Donc pour tout W voisinage de 0 dans L(E,F) on a :

$$r(tuh + tk) \text{ et } r(tuh) \in tW$$

pour t assez petit. Comme l'évaluation par h de L(E;F) dans F est continue, pour tout V disque fermé voisinage de zéro dans F,

$$\big(r(tuh + tk) - r(tuh)\big)(th) \in 2\, t^2V$$

pour t assez petit. Si c'est pour un tel t que l'on a défini g, cette expression est g'(u) - f"(a)(tk)(th). Donc, par le théorème de la moyenne, g(1) - f"(a)(tk)(th) - g(0) $\in$ 2 t^2V. On a aussi g(1) - f"(a)(th)(tk) - g(0) $\in$ 2 t^2V parce que g(1) - g(0) est symétrique en h et k. Ainsi, en divisant par t^2, f"(a)(h)(k) - f"(a)(k)(h) $\in$ V.

La symétrie des dérivées d'ordre supérieur en un point en résulte. Nous noterons S^k(E;F) l'espace des éléments symétriques de L(E;...k fois...L(E;F)...). Les dérivées k^e sont donc à valeurs dans S^k(E;F) dans le cas (F), (S), (G_b) et (G_p). Nous noterons L^k_S (βE;βF) l'espace formé des éléments symétriques de L^k(βE;βF).

INFINIMENT PETITS D'ORDRE SUPERIEUR.

4. Soit r une fonction de E dans F.

DEFINITION. On dit que r est un infiniment petit d'ordre n, ou que r(h) est un o(h), de type (S) si

$$\lim_{\substack{t\to o\\ t\neq o}} \frac{r(th)}{t^n} = 0$$

en convergence de Mackey, uniformément en h sur les bornés.

On définit de même les $o(h)^n$ au sens (F), (G_b) et (G_p) en s'inspirant de 3.1.1 à 5 .

La dérivée première f'(a) est caractérisée entièrement par la propriété que la différence f(a+h) - f(a) est approchée par f'(a)(h) à un o(h) près. Au contraire la dérivée $f^{(n)}(a)$ n'est jusqu'ici liée à f que, bien indirectement, comme dérivée de $f^{(n-1)}$. Peut-on approcher f(a+h) - f(a) à un infiniment petit d'ordre plus élevé par un polynôme utilisant les dérivées d'ordre supérieur ? Cette propriété d'approximation caractérise-t-elle alors les dérivées d'ordre supérieur ? C'est le problème du développement de Taylor limité et de son reste.

FONCTIONS QUI ONT UN INFINIMENT PETIT POUR DERIVEE.

5. La proposition qui suit est le point essentiel dans la démonstration du théorème de Taylor.

PROPOSITION. Si la fonction r de E dans F a pour dérivée (G_p) sur un ensemble étoilé à partir de l'origine, un infiniment petit d'ordre n-1 de type (S) ou (G_b), alors r est un infiniment petit d'ordre n de type (S) ou (G_b) respectivement.

Démonstration. Que r'(h) soit un $o(h)^{n-1}$ de type (S) s'exprime par une relation de la forme :

$$h \in B,\ |t| \leq \delta \Rightarrow r'(th) \in \varepsilon\, t^{n-1} H$$

où B et H sont des disques bornés dans E et L (E; F) respectivement.
Il résulte de la continuité de l'évaluation : $\beta E \times \beta L(E;F) \to \beta F$ que :

$$h \in B,\ |t| \leq \delta \Rightarrow r'(th)(h) \in \varepsilon\ t^{n-1} C$$

pour un certain disque borné fermé C dans F . Le théorème de Frölicher et Bucher appliqué à la fonction r(uh) de la variable réelle u sur l'intervalle $[0,t]$ fournit alors :

$$h \in B,\ |t| \leq \delta \Rightarrow r(th) \in \frac{\varepsilon}{n} t^n C .$$

Dans le cas d'un $o(h)^{n-1}$ de type (G_b), si V est un disque fermé voisinage de zéro dans F, on peut trouver un voisinage de zéro W dans L(E;F) tel que $W(B) \subseteq V$ et on aura, successivement,

$$r'(th) \in t^{n-1} W,$$
$$r'(th)(h) \in t^{n-1} V,$$
$$r(th) \in t^b \frac{V}{n}$$

de la même manière.

POLYNOMES.

6. Soit $\ell \in S^k(E;F)$. On écrira $\ell(x)^k$ pour $\ell(x)$...k fois...(x). Les dérivées partielles de ℓ existent et sont continues du fait de la symétrie qui permet de ne dériver que des opérateurs linéaires. Ainsi, par exemple, $\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \ell(x_1)(x_2)\ldots(x_k)\right)(h_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \ell(x_1)\ldots(x_k)(x_2)\right)(h_2) = \ell(x_1)\ldots(x_k)(h_2)$.
Il résulte alors de 3.1.12 que ℓ est dérivable (G_b) et, en faisant $x_1 = \ldots = x_k = x$, que la dérivée (G_b) de $\ell(x)^k$ est $k\,\ell(x)^{k-1}$.

Alternativement, on pourrait dériver (G_b) les éléments de L(E;...kfois ... L(E;F)...) par un calcul direct. Soit, pour simplifier, $\ell \in L(E;L(E;F))$.
On a $\ell(a+h)(b+k) - \ell(a)(b) = \ell(h)(b) + \ell(a)(k) + \ell(h)(k)$ et $\frac{\ell(th)(tk)}{t} = t\ell(h)(k)$. Ce qui tend vers zéro. Reste à voir que la convergence est uniforme en h et k sur les bornés. L'application ℓ est bornée

en ses deux variables : si B est un borné de E, $\ell(B)$ est un borné de L(E;F), c'est-à-dire que $\ell(B)(C)$ est borné pour tout borné C dans E. Ainsi ℓ est dérivable (G_b).

Aucun de ces deux procédés ne nous renseigne sur la dérivée (F) d'un polynôme.

Le cas de la dérivée (β) d'un élément ℓ de $L_s^k(\beta E;\beta F)$ est plus simple : on applique 2.1.7 . La dérivée de $\ell(x)^k$ est encore $k\ell(x)^{k-1}$.

THEOREME DE TAYLOR.

7. <u>THEOREME</u> (Formule de Taylor). Soit f une fonction n fois dérivable au sens (β) ou (G_b) sur un ensemble A étoilé autour d'un point a. Si l'on écrit, pour tout a+h dans A,

$$(1) \qquad f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(h)^n + r(h) ,$$

alors r(h) est un $o(h)^n$ de type (S) ou (G_b) respectivement.

<u>Démonstration.</u> Dérivons par rapport à h la fonction f(a+h) et le polynôme qui figure au second membre de (1). Les dérivées sont f'(a+h) et $f'(a) + \frac{1}{2} f''(a)(h)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(h)^{n-1}$. Ainsi r'(h) est le reste du développement de degré n-1 de f'. Si l'on suppose le théorème démontré à cet ordre, r'(h) est un $o(h)^{n-1}$ de type (S) ou (G_b) et le théorème résulte de 4.3.5.

RESTE DE LA FORMULE DE TAYLOR SOUS FORME D'INTEGRALE.

8. <u>THEOREME.</u> Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au sens (β) ou (G_b) sur un ensemble étoilé autour de a. On a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(h)^n$$
$$+ \int_0^1 \left(f^{(n)}(a+th) - f^{(n)}(a)\right)(h)^n \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

et cette dernière intégrale est un $o(h)^n$ de type (S) ou (G_b) respectivement.

Démonstration. 1° Il faut d'abord remarquer que $\int_0^1 f^{(n)}(a)(h)^n \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} = f^{(n)}(a)(h)^n \frac{1}{n!}$. Calculons alors l'autre intégrale. Les dérivées de la fonction $t \rightsquigarrow a+th$, autres que la première, sont identiquement nulles. Par conséquent les dérivées successives par rapport à t de $f(a+th)$ sont simplement $f'(a+th)(h)$, $f''(a+th)(h)^2, \ldots, f^{(n)}(a+th)(h)^n$. L'intégration par parties de $f^{(n)}(a+th)(h)^n \frac{(1-t)^{n-1}}{n-1!}$ donne alors

$$- \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(h)^{n-1} - \ldots - f'(a)(h) + f(a+h) - f(a).$$

2° La seconde partie de la thèse résulte de 4.3.7. On peut également la démontrer par calcul direct en utilisant la continuité de $f^{(n)}$ un peu comme en 3.1.12.

RECIPROQUE DU THEOREME DE TAYLOR.

9. Une fonction qui peut être approchée par un polynôme de degré n, à un infiniment petit d'ordre n près, et ce de manière suffisamment régulière, est de classe $\mathcal{C}^n$. Ce théorème est mal connu dans les cas les plus simples. Nous en avons fait une démonstration élémentaire pour le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle; elle est donnée en appendice à titre de curiosité (A.7).

Le cas de dimension infinie est traité par Abraham et Robbin pour les Banachs. La démonstration donnée ici est la même.

THEOREME. Soit f une fonction de E dans F définie sur un convexe A.

Supposons que l'on ait des fonctions ℓ_k définies sur A et continues : $\beta E \to L_S^k(\beta E;\beta F)$ ou continues : $E \to S^k(E;F)$ telles que, pour x et x+h dans A,

$$f(x+h) = \ell_0(x) + \ell_1(x)(h) + \ldots + \frac{1}{n!}\ell_n(x)(h)^n + r(x,h)$$

avec, pour tout $x_o \in A$,

$$\lim_{\substack{t\to o\\ t\neq o\\ x\to x_o}} \frac{r(x,th)}{t^n} = 0$$

uniformément en h sur les bornés de E, au sens de Mackey dans F ou, respectivement, dans la topologie de F .

Alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ au sens (β) ou (G_b), respectivement, et les dérivées de f sont données par :

$$f^{(k)} = \ell_k \quad .$$

<u>Démonstration.</u> Le théorème sera démontré à suffisance si l'on établit que :

$$(1) \qquad \ell_k(x+h) - \ell_k(x) = \int_0^1 \ell_{k+1}(x+th)(h)dt$$

puisque cette relation entraîne que $\ell_k' = \ell_{k+1}$ par 4.2.12 ou 4.2.14. Supposons donc que nous ayons k, x et h pour lesquels l'égalité (1) ne soit pas vérifiée. Il existe un k-uple $(h^1,\ldots,h^k)$ d'éléments de E où ces applications prennent une valeur différente dans F et ensuite, par le théorème de Hahn-Banach, une forme linéaire ℓ continue sur F qui sépare ces deux éléments de F :

$$\ell(\ell_k(x+h) - \ell_k(x)) \neq \int_0^1 \ell\big(\ell_{k+1}(x+th)(h,h_1,\ldots,h_k)\big)\, dt \quad .$$

Soit E_o l'espace engendré par $x,h,h_1,\ldots,h_k$. On voit que la fonction réelle $g = \ell\circ f/E_o$, que l'on peut considérer comme une fonction d'un nombre fini de variables réelles, ne satisfait pas au théorème. Or le théorème est vrai (Abraham et Robbin)dans les Banachs et donc a fortiori dans les espaces de dimension finie.

<u>Remarque.</u> Posons $s(x,t,h) = \dfrac{r(x,th)}{t^b}$. L'hypothèse est que $s(x,0,h) = 0$ pour tout x et que en tout point (x,0), la fonction s est continue en les variables x et t conjointement, uniformément en h sur les bornés.

CHAPITRE 5. LE PROBLEME DES FONCTIONS IMPLICITES.

§ 1. THEOREMES D'EXISTENCE.

POINTS FIXES.

1. Nous utiliserons pour les fonctions implicites un résultat inspiré du "principe du point fixe de Banach" et que l'on pourrait intituler "principe du point fixe à un paramètre".

LEMME. Soient g une fonction continue de $E \quad F$ dans F et (x_o, y_o) un point de $E \times F$ tel que $g(x_o, y_o) = y_o$. S'il existe un ensemble A dans E, un disque borné B de F, complet pour sa topologie propre (celle induite par F_B) et un nombre positif $k < 1$ tels que g soit définie sur $(x_o + A) \times (y_o + B)$ et que :

$$\left.\begin{array}{c} x \in x_o + A \\ y \text{ et } y' \in y_o + B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x,y) \in y_o + B \\ \|g(x,y) - g(x,y')\|_B \leq k \|y-y'\|_B \end{array}\right. ,$$

alors il existe une application u de $x_o + A$ dans $y_o + B$, unique, continue : $E \to F$, telle que $u(x_o) = y_o$ et telle que $u(x)$ soit un point fixe de l'application $y \rightsquigarrow g(x,y)$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in x_o + A$,

$$u(x) = g(x, u(x)) .$$

Démonstration. Posons $u_o(x) = y_o$, $u_1(x) = g(x, y_o(x)), \ldots u_{n+1}(x) = g(x, u_n(x)), \ldots$, pour $x \in x_o + A$. La suite des $u_n(x)$ est Cauchy, uniformément sur $x_o + A$, dans $y_o + B$ pour sa topologie propre. En effet $\|u_{n+1}(x) - u_n(x)\|_B = \|g(x, u_n(x)) - g(x, u_{n-1}(x))\|_B$ est majoré par $k \|u_n(x) - u_{n-1}(x)\|_B$ et, de proche en proche, par k^n puisque $u_1(x) \in y_o + B$. On a $u_o(x_o) = u_1(x_o) = \ldots = u_n(x_o) = \ldots = y_o$. Donc si $u(x) = \lim u_n(x)$, $u(x_o) = y_o$. On a aussi $u(x) = \lim g(x, u_n(x)) = g(x, u(x))$, puisque g est continue. Enfin u est continue sur l'ensemble $x_o + A$ parce que les u_n le sont et que la limite a lieu uniformément sur cet ensemble.

Soit v une autre fonction telle que $v(x) = g(x,v(x))$. On a $\|u(x) - v(x)\|_B = \|g(x,u(x)) - g(x,v(x))\|_B \leq k\|u(x) - v(x)\|_B$, du moins si $v(x) \in y_o + B$ pour $x \in x_o + A$. Dans ce cas $u = v$ sur $x_o + A$.

Remarques. 1° En vertu de A.4, B est complet pour sa topologie propre lorsqu'il l'est pour la topologie de F. Par conséquent l'hypothèse de complétion sur B est réalisée si F est quasi-complet.

2° On voit faiclement dans la démonstration que si A est un disque borné et si g est continue : $(x_o+A) \times (y_o+B) \to y_o + B$ pour les topologies propres de ces ensembles (celles induites par E_A et F_B respectivement) alors u est continue : $x_o + A \to y_o + B$ pour les topologies propres de ces ensembles. Une même remarque pouvait être faite pour les résultats donnés en 5.1.3 à 6. Mais on est alors ramené à un problème posé entièrement en termes d'espaces normés.

2. En prenant le cas où g ne dépend pas de x, on obtient un théorème de point fixe au sens habituel. L'hypothèse de continuité n'apparaît plus explicitement puisque, en y, elle résulte de la condition de contraction. A vrai dire nous sommes dans la situation la plus classique : une restriction de la fonction est contractante d'un métrique complet dans lui-même.

COROLLAIRE. Soit g une fonction de F dans lui-même qui applique dans soi-même le translaté $y_o + B$ d'un disque borné B complet. S'il existe un $k < 1$ tel que :

$$y \text{ et } y' \in y_o + B \Rightarrow \|g(y) - g(y')\|_B \leq k\|y-y'\|_B ,$$

alors la fonction g admet un point fixe unique dans $y_o + B$.

FONCTIONS IMPLICITES.

3. Le "principe du point fixe à un paramètre" s'applique immédiatement à une première forme de problème de fonction implicite.

THEOREME (des fonctions implicites). Soient f une fonction continue de $E \times F$ dans F et (x_o, y_o) un point de $E \times F$ tel que $f(x_o, y_o) = 0$. S'il existe un ensemble $A \subsetneq E$, un disque borné B dans F, complet pour sa topologie propre et un nombre positif $k < 1$ tels que f soit définie sur $(x_o + A) \times (y_o + B)$ et que

$$\left.\begin{array}{l} x \in x_o + A \\ y \text{ et } y' \in y_o + B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x, y_o) \in B(1-k) \\ \|y - y' - f(x,y) + f(x,y')\|_B \leq k \|y - y'\|_B , \end{array}\right.$$

alors il existe une application u de $x_o + A$ dans $y_o + B$, unique, continue : $E \to F$, telle que $u(x_o) = y_o$ et solution du problème d'explication de y dans l'équation $f(x,y) = 0$, c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in x_o + A$,

$$f(x, y(x)) = 0 .$$

Démonstration. On pose $g(x,y) = y - f(x,y)$. Des hypothèses il suit que, pour $x \in x_o + A$ et y et $y' \in y_o + B$, $g(x, y_o) \in y_o + B(1-k)$ et $\|g(x,y) - g(x,y')\|_B \leq k \|y - y'\|_B$. De là on tire que $g(x,y) = g(x, y_o) + (g(x,y) - g(x, y_o)) \in y_o + B(1-k) + kB = y_o + B$ et le lemme s'applique.

4. COROLLAIRE. (Théorème d'inversion). Soient v une fonction continue de F dans lui-même et x_o l'image par v d'un point y_o de F. S'il existe un disque borné B de F, complet pour sa topologie propre, et un nombre positif $k < 1$ tels que v soit définie sur $y_o + B$ et que

$$y \text{ et } y' \in y_o + B \Rightarrow \|y - y' - v(y) + v(y')\|_B \leq k \|y - y'\|_B ;$$

alors il existe une application u de $x_o + B(1-k)$ dans $y_o + B$, unique, telle que, pour tout $x \in x_o + B(1-k)$,

$$v(u(x)) = x .$$

Démonstration. Le problème est d'expliciter y en $y = u(x)$ dans l'équation $f(x,y) = v(y) - x = 0$ où f est définie sur $(x_o + B(1-k)) \times (y_o + B)$. On a bien, pour (x,y) et (x,y') dans cet ensemble, $f(x, y_o) = x_o - x \in B(1-k)$ et la condition de contraction. Le théorème des fonctions implicites s'applique.

5. On peut appliquer ces résultats à des fonctions à valeurs dans un troisième espace, G, si l'on dispose d'un isomorphisme entre F et G . Les énoncés que l'on obtient ainsi sont donnés explicitement pour pourvoir s'y référer dans la suite.

PROPOSITION. Soit f une fonction continue de $E \times F$ dans G qui s'annule au point (x_o, y_o). Soit T un isomorphisme d'e.l.c. de F sur G . S'il existe un ensemble A dans E, un disque borné B de F, complet pour sa topologie propre, et un nombre positif $k < 1$ tels que f soit définie sur $(x_o+A) \times (y_o+B)$ et que :

$$\left.\begin{array}{l} x \in x_o + A \\ y \text{ et } y' \in y_o + B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x,y_o) \in T(B)(1-k) \\ \|T(y-y')-(f(x,y)-f(x,y'))\|_{T(B)} \leq k\,\|y-y'\|_B \end{array}\right.$$

alors il existe une application u de $x_o + A$ dans $y_o + B$, unique, continue : $E \to F$, telle que $u(x_o) = y_o$ et telle que, pour tout x dans $x_o + A$,

$$f(x,u(x)) = 0 .$$

6. COROLLAIRE. Soient v une fonction continue de F dans E et x_o l'image par v d'un point y_o de F. Soit T un isomorphisme d'e.l.c. de F sur E. S'il existe un disque borné B dans F, complet, pour sa topologie propre, et un nombre positif $k < 1$ tels que v soit définie, sur $y_o + B$ et que

$$y \text{ et } y' \in y_o + B \Rightarrow \|T(y-y')-(v(y)-v(y'))\|_{T(B)} \leq k\,\|y-y'\|_B ,$$

alors il existe une application u de $x_o + T(B)(1-k)$ dans $y_o + B$, unique, continue : $E \to F$, telle que, pour tout x dans $x_o + T(B)(1-k)$,

$$v(u(x)) = x .$$

7. Dans le cas classique où E,F et G sont normés, on suppose f différentiable et que $T = f'_2(x_o,y_o)$. Les autres hypothèses résultent de celle-là par l'application du théorème de la moyenne pour des ensembles A et B avec un intérieur non vide. Ici, au contraire, il faut faire explicitement l'hypothèse de contraction et la différentiabilité est alors inutile. Ensuite l'explication $y = u(x)$ que l'on obtient n'est pas nécessairement définissable

sur un ensemble à intérieur non vide.

Quoique la présentation finale soit plus proche de celle de Dieudonné, les résultats qui précèdent sont inspirés par l'article de Falb et Jacobs. C'est eux qui ont eu l'idée de se limiter à un ensemble borné et d'utiliser une hypothèse de contraction. L'inutilité de l'hypothèse de différentiabilité dans la question de l'existence d'une solution ressort à l'évidence de leurs travaux puisque la notion de dérivée qu'ils utilisent est pratiquement vide de sens (et, contrairement à ce qu'affirme leur proposition 2, ne coïncide évidemment pas avec la définition habituelle pour les espaces normés ni même pour R).

Que l'explication (ou l'inversion) n'est pas en général "locale" au sens habituel (sur un voisinage du point considéré) résulte du contre-exemple que l'on trouve dans Eels, dans "Differenzierbarkeit" de Keller et dans Falb et Jacobs. Il s'agit de fonctions qui ne sont pas inversibles dans un voisinage de l'image de l'origine, tantôt par défaut d'injectivité, tantôt par défaut de surjectivité.

Considérons ainsi la fonction exponentielle v de R^N dans lui-même qui à une suite $y = (y_n)$ associe la suite $v(y) = (\exp y_n)$. Cette fonction est étudiée comme exemple 1. La fonction inverse est évidente : c'est la fonction logarithme qui à une suite $x = (x_n)$ associe la suite $u(x) = (\log x_n)$. Cette fonction n'est définie que sur l'ensemble des suites (x_n) avec $x_n > 0$ et cet ensemble n'a pas d'intérieur dans R^N. Pourtant cette fonction vérifie les plus fortes hypothèses de différentiabilité (exemple 1). De plus elle vérifie les conditions données en 5.1.4 avec $k = \frac{1}{2}$ et $B = \{y \mid \forall n,\ y_n| \leq \delta\}$ où δ est tel que, pour t et t' réels,

$$|t| \text{ et } |t'| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |t-t' - e^t + e^t| \leq \frac{1}{2}|t - t'|$$

(un tel δ existe par la formule des accroissements finis).

§ 2. DERIVABILITE DE LA SOLUTION.

1. On sait que, dans les espaces normés, la différentiabilité de f entraîne celle de la solution. Dans les e.l.c. nous allons, comme pour les théorèmes d'existence, faire des hypothèses explicites, et cela encore en s'inspirant de Falb et Jacobs.

THEOREME. Soit f une fonction de $E \times F$ dans G qui s'annule en un point (x_o, y_o) et qui admet des dérivées partielles (β) en ce point de telle sorte que $f_2'(x_o, y_o)$ soit un isomorphisme d'e.b.c. de βF sur βG . Supposons résolu le problème d'explicitation par une fonction u définie sur un sous-ensemble $x_o + A$ de E, continue en x_o : $\beta E \to \beta F$, telle que :

$$\begin{cases} u(x_o) = y_o \\ f(x, u(x)) = 0 \end{cases}$$

Si, pour tout disque borné B dans F et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout x dans $x_o + A$ et tout k dans F :

$$(1) \quad \|k\|_B \leq \delta \Rightarrow \|f_2'(x_o, y_o)(k) - \big(f(x, y_o+k) - f(x, y_o)\big)\|_{f_2'(x_o, y_o)(B)} \leq \varepsilon \|k\|_B$$

alors u est dérivable (β) en x_o et sa dérivée est donnée par la formule :

$$u'(x_o) = - \big(f_2'(x_o, y_o)\big)^{-1} \circ f_1'(x_o, y_o) \quad .$$

Démonstration. Considérons, en posant $T = f_2'(x_o, y_o)$,

$$\varphi(h) = f\big(x_o+h, u(x_o+h)\big) - f(x_o+h, y_o) - T\big(u(x_o+h) - y_o\big) \quad .$$

Comme $f(x, y(x)) = 0$, on a tout aussi bien

$$\varphi(h) = -f_1'(x_o, y_o)(h) - T\big(u(x_o+h) - y_o\big) - \psi(h)$$

où $\psi(h)$ est un $o(h)$ de type (S). Posons $f_1'(x_o, y_o) = S$. On a donc:

$$S(h) + T\big(u(x_0+h)-y_0\big) = \varphi(h) + \psi(h)$$

soit encore :

$$u(x_0+h) - y_0 + (T^{-1}\circ S)(h) = (T^{-1}\circ \varphi)(h) + (T^{-1}\circ\psi)(h)$$

Le théorème sera démontré si l'on prouve que le second membre est un o(h) de type (S).

De (1) on tire que, pour tout disque borné B dans F et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

(2) $\|u(x_0+h)-y_0\|_B \leqslant \delta \Rightarrow \|(T^{-1}\circ \varphi)(h)\|_B \leqslant \varepsilon \|u(x_0+h)-y_0\|_B$.

Soit C un disque borné de E . Comme

(3) $T^{-1}\circ S$ est continu,

(4) u est continue en x_0 : $\beta E \to \beta F$,

(5) $(T^{-1}\circ \psi)(h)$ est un o(h),

on peut choisir B disque borné de F tel que

$$\|(T^{-1}\circ S)(h)\|_B \leqslant \|h\|_C \quad , \text{ par (3)} ,$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall\delta > 0,\ \eta > 0 : \|h\|_C \leqslant \eta \Rightarrow \begin{cases} \|(T^{-1}\circ\psi)(h)\|_N \leqslant \varepsilon\|h\|_C \ , \text{ par (5)}, \\ \|u(x_0+h)-y_0\|_B \leqslant \delta \ , \text{ par (4)}. \end{cases}$$

On combine (2) et (5) pour avoir :

(6) $\|h\|_C \leqslant \eta \Rightarrow \|(T^{-1}\circ\varphi)(h) + (T^{-1}\circ\psi)(h)\|_N \leqslant \varepsilon \left(\|u(x_0+h)-y_0\|_B + \|h\|_C\right)$.

On peut supposer $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, d'où, par (6) et (3),

$$\|u(x_0+h)-y_0\|_B \leqslant \|(T^{-1}\circ\varphi)(h) + (T^{-1}\circ\psi)(h)\|_B + \|(T^{-1}\circ S)(h)\|_B$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u(x_0+h)-y_0\|_B + (\frac{1}{2} + 1)\|h\|_C$$

soit

(7) $$\|u(x_0+h)-y_0\|_B \leqslant \varepsilon \|h\|_C \ .$$

Reste à combiner ces majorations : portant (7) dans (6), il vient :

$$\|h\|_C \leqslant \eta \Rightarrow \|(T^{-1}\circ\varphi)(h) + (T^{-1}\circ\psi)(h)\|_B \leqslant 4\varepsilon \|h\|_C \ .$$

<u>COROLLAIRE.</u> Soient v une fonction de F dans E et x_o l'image par v d'un point y_o de F. Supposons que v soit dérivable (β) en y_o, que $v'(y_o)$ soit un isomorphisme de βF sur βE et que l'on ait une fonction u continue en x_o : $\beta E \to \beta F$, telle que $u(x_o) = y_o$ et que $v(u(x)) = x$.

Si pour tout disque borné B dans F et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\|k\|_B \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|v'(y_o)(k) - \big(v(y_o+k) - v(y_o)\big)\|_{v'(y_o)(B)} \leq \varepsilon \ \|k\|_B ,$$

alors u est dérivable (β) en x_o et sa dérivée est donnée par la formule :

$$u'(x_o) = v'(y_o)^{-1} .$$

L'hypothèse (1) est fort exigente. Elle implique d'abord que $f_2'(x,y_o)$ ne dépend pas de x. On remarquera que cette dernière condition est réalisée automatiquement si $f(x,y) = x-v(y)$, c'est-à-dire dans les problèmes d'inversion.

L'autre aspect de l'hypothèse (1) est que $f_2'(x_o,y_o)$ est la dérivée (β) , non seulement en tout point (x,y_o) uniformément en x, mais aussi en un sens beaucoup plus fort que la condition habituelle : celle-ci serait, en (x_o,y_o) que pour tout disque borné B dans F, il doit exister un disque borné C dans G tel que :

$$\|k\|_B \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f_2'(x_o,y_o)(k) - \big(f(x_o,y_o+k) - f(x_o,y_o)\big)\|_C \leq \varepsilon \ \|k\|_B .$$

Dans le théorème et son corollaire, on exige que $C = f_2'(x_o,y_o)(B)$.

Une difficulté apparaît lorsque l'on rapproche les deux paragraphes de ce chapitre. Les théorèmes d'existence fournissent des solutions continues : $E \to F$ et les théorèmes de différentiabilité ne s'appliquent qu'aux solutions continues : $\beta E \to \beta F$. Il ne semble pas qu'un aménagement des démonstrations utilisées ici puisse combler l'écart.

Mais il est des circonstances où la continuité : $E \to F$ entraîne la continuité : $\beta E \to \beta F$. Soit D un disque borné dans E. Une fonction u continue en x_o : $E \to F$ est a fortiori continue en x_o : $E_D \to F$. Reste à voir quand la convergence de $u(x_o + h) - u(x_o)$ pour $h \to o$ dans E_D a lieu au sens de Mackey dans F. C'est le cas lorsque la fonction u est bornée sur les bornés et que l'espace F vérifie la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés.

Or u est toujours borné dans les théorèmes d'existence qui précèdent. Ainsi les résultats de ce chapitre se combinent pour fournir un théorème d'existence <u>et</u> de différentiabilité de la solution dans le cas des espaces F qui vérifient la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés, donc en particulier les espaces métrisables (A.2.2).

E X E M P L E S .

EXEMPLE 1.

La topologie produit sur R^N en fait un espace localement convexe métrisable et complet (espace de Fréchet). Considérons la fonction v de R^N dans lui-même qui à une suite $y = (y_n | n \in N)$ fait correspondre la suite $v(y) = (\exp y_n | n \in N)$.

1. La dérivée de v à l'origine est l'identité sur R^N.

En effet :

$$\lim \frac{v(th) - v(o)}{t} = \left(\lim \frac{\exp th_n - 1}{t}\right) = (h_n)$$

2. C'est la dérivée (F). En effet, pour n fixé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|h_n| \leq \delta \Rightarrow |\exp h_n - 1 - h_n| \leq \varepsilon |h_n| .$$

3. C'est la dérivée (S). Un système fondamental de bornés de R^N est formé des ensembles $\{x = (x_n) | \forall n \in N, |x_n| \leq a_n\}$ où (a_n) parcourt R^N_+.

a) On peut faire le calcul direct. Nous avons à démontrer :

$$\forall (a_n) \in R^N_+, \exists (b_n) \in R^N_+ : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$$
$$(\forall n \in N, |h_n| \leq a_n) \text{ et } (|t| \leq \delta) \Rightarrow (\forall n \in N, |\exp th_n - 1 - th_n| \leq \varepsilon |t| b_n) .$$

D'abord $|\exp th_n - 1 - th_n| \leq |\exp ta_n - 1 - ta_n|$ si $|h_n| \leq a_n$. Ensuite, en prenant $b_n = e^{an}$, il vient :

$$|\exp ta_n - 1 - ta_n| \leq |t|^2 b_n$$

Comme il résulte de la comparaison des séries de Taylor.

b) On peut appliquer le théorème donné en 3.2.2. On a la dérivabilité (G_b) puisque (F). L'espace R^N satisfait à la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés parce qu'il est métrisable. Reste à vérifier que notre infiniment petit (G_b) est borné sur les bornés pour qu'il soit (S).

Dans $(\exp h_n - 1 - h_n)$, l'identité et la constante $(1,1,\ldots)$ sont des fonctions bornées sur les bornés et sur le borné "$|h_n| \leq a_n$", on a : $|\exp h_n| \leq h_n$ si $b_n = e^{an}$.

4° Plus généralement, la dérivée au point y est l'opérateur linéaire : $(h_n) \rightsquigarrow (h_n \exp y_n)$ et cette dérivée est dérivée (S) et (F). Celà découle des résultats obtenus pour y = 0 du fait que $e^{t+h} - e^t = e^t(e^h - e^\circ)$.

5° Une suite (α_n) donne lieu à un opérateur linéaire continu $\alpha : R^N \to R^N : (h_n) \rightsquigarrow (\alpha_n h_n)$. On peut donc identifier R^N avec un sous-espace vectoriel de $L(R^N, R^N)$ et ce dernier espace induit alors sur R^N la topologie produit habituelle. De ce point de vue on peut dire que v est sa propre fonction dérivée. Elle est donc $\mathcal{C}^\infty$. Semblablement on démontre que v est $\beta\mathcal{C}^\infty$. On démontre comme au 3° que v est $\mathcal{E}^\circ$: $\beta R^N \to \beta R^N$ (ce qui implique que v est bornée sur les bornés). Donc v est de classe $\mathcal{E}^\infty$: $\beta R^N \to \beta R^N$.

Variantes. A. On peut remplacer l'espace des suites R^N par l'espace des applications R^R (c'est l'exemple utilisé par Falb et Jacobs). Cet espace n'est pas métrisable en topologie produit.

B. Eells se limite à l'espace $\mathcal{C}(R)$ des fonctions continues en topologie de convergence uniforme sur les compacts. Les calculs que nous avons donnés ici s'adaptent facilement : les inégalités considérées pour la n^e coordonnée doivent être remplacées par des inégalités valant uniformément sur un compact K.

EXEMPLE 2.

Soit E un espace normé de dimension infinie. Le carré de la norme est un infiniment petit au sens habituel, c'est-à-dire (F) et tout aussi bien (S) puisque les espaces considérés sont normés. Soit E_f l'e.l.c. faible associé. Cet espace a les mêmes bornés que E et donc les mêmes infiniment petits (β) . Mais le carré de la norme n'est pas faiblement continu et ne peut donc être un infiniment petit (F) pour la topologie faible de E (Keller, "Differenzierbarkeit").

EXEMPLE 3.

Soit $E = \ell^\infty$ en norme et $F = R^N$ en topologie produit. Posons

$$u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{1 - nt} & \text{si } t \neq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } t = \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Soit alors f l'application de ℓ^∞ dans R^N définie par :

$$x = (x_n | n \in N) \rightsquigarrow f(x) = \left(u_n(x_n) | n \in N\right).$$

On va voir que f(x) est un o(x) (G_b) et donc (F) puisque E est normé. Soit B le borné $\{x | \|x\| \leq n\}$ dans ℓ^∞ et soit $n \in N$; il est possible de rendre la n^e coordonnée de f(tx), à savoir $\dfrac{t^2 x_n^2}{1-nt\, x_n}$, plus petit que εt, uniformément en $x = (x_n) \in B$.

Au contraire aucun disque borné de la forme B considérée ci-dessus n'a une image par f bornée dans F : il suffit de prendre $n \geq \dfrac{1}{\eta}$ pour que $u_n(x_n)$ prenne toute valeur positive pour x dans B. On a donc pas un $(O(x) : \beta E \to \beta F$. Donc (2.1.12) f(x) n'est pas un o(x) de type (S) (Keller, "Differenzierbarkeit").

A P P E N D I C E S .

1. Un théorème sur la continuité uniforme.

Dans des cas très étendus, une fonction uniformément continue sur un ensemble borné est bornée sur cet ensemble (voir aussi 1.1.8).

THEOREME. Soient E et F deux espaces semi-normés, A un borné de E, étoilé à partir d'un de ses points, et f une application de A dans F. Si f est uniformément continue, elle est bornée.

Par "étoilé à partir d'un de ses points" on entend qu'il existe un $x_o \in A$ auquel tout autre point de A est relié par un segment dans A.

Démonstration. On peut supposer que la distance d'un point quelconque de A au point x_o ne dépasse pas 1. En vertu de la continuité uniforme, il existe un n entier > 0 tel que, si x et y appartiennent à A ,

$$\|x-y\| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq 1 .$$

Décomposons l'intervalle $[0,1]$ en n sous-intervalles de longueur égale et appelons $t_o = 0, t_1, \ldots, t_n = 1$ les points de subdivision. On décompose alors sur ce modèle le segment qui joint x_o à un point x de A et on écrit :

$$(1) \qquad f(x) = f(x_o) + \sum_1^n \left(f(x_o+t_i(x-x_o) - f(x_o+ t_{i-1}(x-x_o))\right) .$$

Or $\|x_o + t_i(x-x_o) - x_o - t_{i-1}(x-x_o)\| = (t_i-t_{i-1}) \|x-x_o\| \leq \frac{1}{n}$ puisqu'on a supposé $\|x-x_o\| \leq 1$. Donc :

$$(2) \qquad \|f(x_o+t_i(x-x_o)) - f(x_o + t_{i-1}(x-x_o))\| \leq 1 .$$

Et en portant (2) dans (1) il vient :

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_o)\| + n$$

indépendamment de x.

On trouve ce théorème pour les ensembles A qui sont des boules dans le livre de Vainberg. Si la démonstration donnée ici est rédigée plus simplement, c'est dû à la lecture du cours de La Vallée Poussin (Tome I, n°27, p.26 de la 12e édition).

2. Les conditions de convergence de Mackey.

LA CONDITION POUR LES SUITES ET LA CONDITION POUR LES FILTRES BORNES.

1. Soit E un e.l.c. Nous dirons que E vérifie la condition de convergence de Mackey pour les suites si toute suite d'éléments de E, tendant vers zéro dans la topologie de E, converge également au sens de Mackey.

Nous dirons que E vérifie la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés si tout filtre dans E, tendant vers zéro dans la topologie de E et comprenant parmi ses éléments un ensemble borné, converge également au sens de Mackey.

Comme une suite qui converge dans une topologie vectorielle est bornée, la seconde condition entraîne la première. Ces conditions sont citées par Grothendieck dans "E.V.T." (IV-4.1, exercice 2) et dans "F & DF" (III.1) sous des appellations différentes. En réalité la seconde conditions diffère de celle de Grothendieck autrement que par l'appellation mais la proposition qui suit assure l'équivalence.

PROPOSITION. L'espace E vérifie la condition pour les filtres bornés si et seulement si pour tout borné B il existe un disque borné A dans E tel que les topologies induites sur B par celle de E_A et celle de E coïncident ("condition stricte" de Grothendieck).

Démonstration. Soit B un disque borné. Appelons $\mathcal{W}$ le filtre des voisinages de 0 dans la topologie induite sur B par celle de E. Si l'on suppose que E vérifie la condition pour les filtres bornés, $\mathcal{W}$ converge au sens de Mackey, c'est-à-dire dans un certain E_A .

Inversément soit $\mathcal{F}$ un filtre. Si B est un élément de $\mathcal{F}$, la convergence de $\mathcal{F}$ ne dépend que des topologies sur B . Si $\mathcal{F}$ tend vers zéro et qu'on a la "condition stricte", $\mathcal{F}$ converge dans un E_A et donc au sens de Mackey.

2. THEOREME. Les espaces localement convexes métrisables vérifient la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés.

C'est un fait assez connu. On en trouve une démonstration chez Grothendieck dans "E.V.T" (IV-2.2, théorème 1) et dans "F & DF" (III.1, p.106).

LA CONDITION POUR LES FILTRES A BASE DENOMBRABLE.

3. Autre condition du même genre : un e.l.c. E vérifie la condition de convergence de Mackey pour les filtres à base dénombrable, si tout filtre dans E, tendant vers zéro dans la topologie de E et admettant une base dénombrable, converge également au sens de Mackey.

PROPOSITION. Dans un e.l.c. dont les bornés admettent une cobase dénombrable, la condition de convergence de Mackey pour les suites entraîne la condition pour les filtres à base dénombrable.

Ce fait est moins connu mais la démonstration (Grothendieck, "F & DF", III.1, prop.15) est trop longue pour la reproduire ici.

DISQUES METRISABLES.

4. PROPOSITION. Soit E un e.l.c. dont les bornés admettent une cobase dénombrable et vérifiant la condition de convergence de Mackey pour les suites. Alors, pour tout disque métrisable M dans la topologie induite par E, il existe un espace E_A (A disque borné) qui induit sur M la même topologie.

Démonstration. Le filtre des voisinages de 0 dans M est à base dénombrable. Donc il tend vers 0 dans un certain E_A, par A.2.3.

COROLLAIRE. Dans un e.l.c. donc les bornés admettent une cobase dénombrable la condition de convergence de Mackey pour les filtres bornés est équivalente à la conjonction de la condition pour les suites et de la condition que les bornés soient métrisables.

3. Bornivores.

BORNIVORES.

1. Dans un espace vectoriel, on dit que l'ensemble M absorbe l'ensemble B s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que :

(1) $$|t| \leq \varepsilon \Rightarrow tB \subseteq M$$

Si soit M, soit B, est un disque, la condition (1) se réduit à

(2) $$\varepsilon B \subseteq M$$

Un ensemble M qui absorbe tous les points de l'espace est dit absorbant.

Dans un espace à bornés, on appelle bornivore un ensemble M qui absorbe tous les bornés. Si l'espace est à bornés convexes, tout borné B est contenu dans un disque borné et il suffit de vérifier que $\varepsilon B \subseteq M$ our un certain $\varepsilon > 0$, la condition complète en résultant.

On appelle bornivore dans un espace localement convexe E un ensemble qui est bornivore dans l'e.b.c. βE associé.

BORNIVORES ET BORNIVORES CONVEXES.

2. Les disques bornivores interviennent dans la plupart des traités sur les espaces localement convexes : par exemple, les e.l.c. bornologiques sont généralement définis par la condition que tout disque bornivore est voisinage de zéro. Mais dans les problèmes non linéaires on voit apparaître des bornivores non nécessairement convexes (3.2.3) et il existe des bornivores qui ne contiennent aucun bornivore convexe. Soit $R^{(R)}$ l'espace des applications de R dans R dont le support est fini, muni de sa topologie de somme directe de droites. La topologie est la plus fine des topologies localement convexes que l'espace admet, mais il existe une topologie vectorielle strictement plus fine (Kelley et Namioka, 14 D et 6 I).

Par conséquent il existe des ensembles absorbants ne contenant pas de convexe absorbant. Or les bornés sont tous de dimension finie (ibid.) Il en résulte que les bornivores sont exactement les ensembles absorbants.

3. Il y a cependant un théorème classique sur les disques bornivores pour lequel on trouve dans la littérature des démonstrations qui s'appliquent en réalité à tous les bornivores.

<u>THEOREME.</u> Dans un espace localement convexe métrisable, tout ensemble bornivore est voisinage de zéro.

<u>Démonstration.</u> (Schaefer, par exemple). Soit (U_n) une suite fondamentale décroissante de voisinages de zéro. Supposons que l'ensemble M ne contienne aucun $\frac{U_n}{n}$. Soit (x_n) un choix de points $x_n \in \frac{U_n}{n} \sim M$. La suite $(n\, x_n)$ tend vers zéro et est donc bornée. Cependant l'ensemble $\{n\, x_n\}$ n'est pas absorbé par M puisque nM ne contient pas nx_n . M n'est donc pas bornivore.

4. Le théorème de complétion de Cauchy.

THEOREME. (Cauchy ?) Supposons que l'on ait une injection continue d'un e.l.c. quelconque E dans un e.l.c. complet F. Si E admet un système fondamental de voisinages de zéro fermés dans la topologie de F, alors E est complet lui aussi.

Démonstration. Soit (x_α) une famille dirigée de Cauchy dans E. Elle est aussi Cauchy dans F. Soit x un point limite de (x_α) dans F. Pour tout voisinage V de zéro dans E, il existe un α tel que β et $\gamma \geqslant \alpha \Rightarrow (x_\beta - x_\gamma) \in V$. Si V est fermé dans F, on peut passer à la limite en γ et $(x_\beta - x) \in V$. On voit donc déjà que x est dans E. Ensuite comme de tels V forment un système fondamental de voisinages de zéro dans E, x est un point limite de (x_α) dans la topologie de E.

Il n'est certainement pas trivial de tirer le caractère complet d'une topologie de celui d'une topologie plus faible. Ce théorème joue un rôle important dans la théorie des espaces localement convexes et il serait utile, pour s'y référer aisément, de lui donner un nom. Pourquoi celui de Cauchy ?

Considérons une suite (f_n) de fonctions réelles d'une variable réelle bornées sur $[0,1]$. Dire qu'elle est de Cauchy uniformément c'est affirmer des inégalités du genre

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

uniformément en x. Il en résulte d'abord que, pour chaque x, la suite des $f_m(x)$ a une limite f(x). Ensuite comme l'inégalité (1) est préservée par passage à la limite, on obtient l'inégalité :

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

encore uniformément en x. C'est exactement l'argument de la démonstration ci-dessus. A vrai dire, je ne sais pas si ce procédé, qui est toujours le plus utilisé pour trouver des limites uniformes, est dû à Cauchy. Mais puisqu'on s'accorde à donner son nom aux conditions de convergence qui prennent la forme de l'inégalité (1), je propose de l'associer tout aussi bien au théorème ci-dessus.

5. Les espaces de Silva.

1. DEFINITION. On appelle espace de Silva un e.l.c. qui est la réunion d'une suite croissante d'espaces normés tels que la boule unité de chacun soit relativement compacte dans le suivant.

Il existe une autre caractérisation de ces espaces, plus pratique.

PROPOSITION. Un espace de Silva est aussi la réunion d'une suite croissante d'espaces de Banach tels que la boule unité de chacun soit compacte dans le suivant.

Démonstration. Soit E l'espace de Silva, union croissante des espaces normés E_n. On peut supposer que les boules unité fermées B_n correspondantes forment aussi une suite croissante. Soit $\tilde{B}_n$ l'adhérence de B_n dans E_{n+1} et notons $\tilde{E}_n$ l'espace $E_{\tilde{B}_n}$.

a. On a $B_n \subseteq \tilde{B}_n \subseteq B_{n+1}$ donc les inclusions $E_n \subseteq \tilde{E}_n \subseteq E_{n+1}$ sont continues. Ainsi le système des $\tilde{E}_n$ est équivalent au système des E_n.

b. $\tilde{B}_n$ est la boule unité fermée de $\tilde{E}_n$: elle est fermée dans E_{n+1} qui est moins fin. En outre elle est compacte dans $\tilde{E}_{n+1}$ puisqu'elle l'est dans E_{n+1} plus fin.

c. Les $\tilde{E}_n$ sont des Banach. L'injection de $\tilde{E}_n$ dans le complété $\hat{E}_{n+1}$ de E_{n+1} est continue. La boule unité $\tilde{B}_n$ de E_n est compacte, donc fermée, dans $\hat{E}_{n+1}$. Le théorème de complétion de Cauchy (A.4) s'applique.

Ces espaces ont été introduits par Sebastião et Silva dans "Spazi importanti" sous le nom d'espaces LN* (def.3, p.397).

2. Les espaces de Silva fournissent un exemple de situation où il y a coïncidence entre topologie finale et topologie localement convexe finale d'une union d'e.l.c.

PROPOSITION. Un espace de Silva, union localement convexe d'espaces normés, a pour topologie la topologie finale de cette union.

Voir p.399 , Theorema 1, de "Spazi importante".

3. Silva démontre aussi (Theorema 2, p.400, et Corollario 1, p.401- le résultat suivant :

PROPOSITION. Soit E un espace de Silva, union localement convexe d'espaces normés E_n. Un ensemble est borné dans E si et seulement s'il est contenu dans E_n et y est borné. Une suite tend vers zéro dans E ssi elle est contenue dans un E_n et y tend vers zéro.

Il en résulte qu'un espace de Silva admet un système fondamental de bornés et vérifie la condition de convergence de Mackey pour les suites (A.2.1.).

6. Calcul intégral.

0. On trouve des ébauches d'intégration à la Riemann dans le "Calcul" de Sebastião e Silva ainsi que chez Falb et Jacobs, par exemple. Pour intégrer des fonctions continues, l'intégration à partir des fonctions en escalier suffit.

INTEGRATION DES FONCTIONS EN ESCALIER.

1. Soit E un espace vectoriel. Une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$ de la droite réelle est une fonction de la forme :

$$(1) \qquad f = \sum_1^n \varphi_i \, x_i + \sum_0^n \psi_j \, y_j$$

avec x_i et $y_j \in E$ et où φ_i et ψ_j sont les fonctions caractéristiques des ensembles $]c_{i-1}, c_i[$ et $\{c_j\}$ correspondant à une décomposition $c_0 = a \leq c_1 \leq \ldots \leq c_n = b$.

L'intégrale d'une telle fonction en escalier f est :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f = \sum_1^n (c_i - c_{i-1})x_i \quad .$$

En particulier, l'intégrale de la fonction constante x est $(b-a)x$.
Si B est un sous-ensemble de E, on notera $\int_a^b B$ l'ensemble des intégrales de fonctions constantes correspondant aux points de B . On a donc évidemment :

$$\int_a^b B = \left\{ \int_a^b x \, dt \;\middle|\; x \in B \right\} = (b-a)B$$

PROPOSITION. (Théorème de la moyenne pour les intégrales de fonctions en escalier). Soit B un ensemble convexe dans E comprenant les points x_i qui interviennent dans l'expression (1) de la fonction f .
On a alors :

$$\int_a^b f \in \int_a^b B \; .$$

<u>Démonstration.</u> $\sum(c_i - c_{i-1}) = b-a$ donc, B étant convexe et les $x_i \in B$, $\sum (c_i - c_{i-1})x_i \in (b-a)B$.

INTEGRATION DES LIMITES UNIFORMES DE FONCTIONS EN ESCALIER.

2. Soit E un e.l.c. séparé. Il est clair que l'application

$$f \rightsquigarrow \int_a^b f \tag{2}$$

est continue sur l'espace S des fonctions en escalier, muni de la topologie de convergence uniforme sur $[a,b]$. En effet un voisinage générique de zéro dans S est $\{f \in S \mid f([a,b]) \subseteq V\}$ où V est un voisinage de zéro dans E . Ainsi pour tout disque voisinage de zéro V, si $f([a,b]) \subseteq \frac{V}{b-a}$, alors $\int_a^b f \in V$.

3. Par ailleurs soit $\bar{S}$ l'espace des limites uniformes de fonctions en escalier. Tout élément de $\bar{S}$ adhère non seulement à S mais même à un borné de S, donc à un ensemble de la forme $\{f \in S \mid f([a,b]) \subseteq B\}$ où B est un borné de E :

<u>LEMME.</u> Une limite uniforme f de fonctions en escalier est aussi limite uniforme de fonctions en escalier dont les valeurs sont des valeurs prises par f.

<u>Démonstration.</u> Soit $f = \lim g_\alpha$, les g étant en escalier. Supposons que g_α soit de la forme (1). Faisons un choix $t_i \in]c_{i-1},c_i[$ et posons $f_\alpha = \sum_1^n \varphi_i f(t_i) + \sum_0^n \psi_j f(c_j)$. On fait de même pour chaque α indépendamment. Soit V un voisinage disqué de zéro dans E. Si α est assez grand, on a $(f-g_\alpha)([a,b]) \subseteq V + V$. On a donc encore $f = \lim f_\alpha$ uniformément sur $[a,b]$ et les fonctions en escalier f_α vérifient la clause $f_\alpha([a,b]) \subseteq f([a,b])$ demandée.

Par conséquent si f est limite uniforme de fonctions en escalier, f adhère à l'ensemble $\{g \in S \mid g([a,b]) \subseteq f([a,b])\}$ qui est borné dans S puisque $f([a,b])$ est borné dans E.

4. Supposons maintenant E quasi-complet. L'application linéaire continue (2) s'étend de manière unique en une application linéaire continue sur $\bar{S}$, en vertu de Bourbaki, chapitre 3, § 2, n°5, prop.8. Explicitement : si H est un borné de S, l'image de $\bar{H}$ est contenue dans l'adhérence de l'image de H, laquelle est bornée donc complète dans E. On peut donc étendre par continuité l'opération (2) à l'adhérence de H, d'une manière unique puisque E est séparé. Comme toute l'imite uniforme f de fonctions en escalier adhère à un borné de S, l'intégrale d'une telle fonction est définie.

DEFINITION. Si f est limite uniforme de fonctions en escalier f_α, on définit l'intégrale de f par le prolongement décrit ci-dessus, c'est-à-dire:

$$\int_a^b f = \lim \int_a^b f_\alpha$$

5. THEOREME. (Théorème de la moyenne pour les intégrales de limites uniformes de fonctions en escalier). Si la fonction f, limite uniforme de fonctions en escalier, prend ses valeurs dans un ensemble B convexe fermé dans E, on a :

$$\int_a^b f \in \int_a^b B$$

Démonstration. On peut supposer (A.6.3) que $f = \lim f_\alpha$ où les f_α en escalier, sont à valeurs dans le même B . Il en résulte que $\int_a^b f_\alpha \in \int_a^b B$ puisqu'on a déjà le théorème pour les fonctions en escalier (A.6.1) et le théorème général s'obtient en passant à la limite, ce qui est légitime puisque B est fermé.

CARACTERISATION DES LIMITES UNIFORMES DE FONCTIONS EN ESCALIER.

6. DEFINITION. Une fonction d'une variable réelle est dite réglée sur un intervalle fermé si elle y est partout définie et si ses limites à gauche et à droite existent.

PROPOSITIONS. 1° Toute fonction réglée est limite uniforme de fonctions en escalier.

2° Si l'espace est quasi-complet, toute limite uniforme de fonctions en escalier est réglée.

Démonstration. 1° Soit f réglée sur $[a,b]$ à valeurs dans E . Soit V un disque voisinage de zéro dans E. Comme, pour chaque $t \in [a,b]$, $\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s<t}} f(s)$ existe, on peut trouver un intervalle ouvert I(t) contenu dans $[a,b]$ et d'extrémité t tel que $f(s) - f(s') \in V$ pour tous s et s' dans I(t). On choisit de même un intervalle J(t) ouvert, d'origine t et ayant la même propriété. On pose I(a) et $J(b) = \phi$. L'intervalle $K(t) = I(t) \cup \{t\} \cup J(t)$ est un voisinage ouvert de t. Soit $K(t_1),\dots,K(t_p)$ un recouvrement fini de $[a,b]$. Soit $a = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_n = b$ une décomposition de $[a,b]$ reprenant au moins les points $a,b,t_1,\dots,t_p$ et les extrémités des $K(t_k)$. Posons $g = \sum_1^n \varphi_i f\left(\frac{c_{i-1}+c_i}{2}\right) + \sum_0^n \psi_j f(c_j)$ avec φ_i et ψ_j comme dans A.6.1 . On a, pour tout $s \in [a,b]$, $g(s) - f(s) \in V$.

2° Soit $f = \lim f_\alpha$, uniformément sur $[a,b]$, avec f_α en escalier. Soit V un disque voisinage de zéro dans E. Pour α assez grand, on a :

$$(3) \qquad f(t) - f_\alpha(t) \in \frac{V}{3}$$

uniformément en t. Ensuite, pour chaque t, si s et s' sont assez près de t et du même côté,

$$(4) \qquad f_\alpha(s) - f_\alpha(s') \in \frac{V}{3} ,$$

les fonctions en escalier étant évidemment réglées. En combinant avec (4) l'inégalité (3) appliquée en s et en s', il vient :

$$f(s) - f(s') \in V$$

Ainsi, pour chaque t, f(s) est Cauchy $(s \to t,\ s < t)$ ou $(s \to t,\ s > t)$ dans le borné complet $f([a,b])$.

FONCTIONS QUI SONT EN FAIT A VALEURS DANS DES ESPACES NORMES.

7. Soit f une application de $[a,b]$ dans l'e.l.c. séparé E . Dire que $f = \lim f_\alpha$ uniformément sur $[a,b]$ (f_α en escalier) revient à dire que le filtre des $(f-f_\alpha)$ ($[a,b]$) tend vers zéro dans E. On peut supposer que ce filtre est borné en vertu du lemme en A.6.3. Si ce filtre converge pour la convergence de Mackey, c'est-à-dire dans un espace E_B (B disque borné), on a : $f = \lim f_\alpha$ uniformément sur $[a,b]$ dans l'espace normé E_B . C'est le cas évidemment si E vérifie la condition de convergence de Mackey, pour les filtres bornés, donc, en particulier, si E est métrisable.

7. Réciproque du théorème de Taylor dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle.

1. On dit de la fonction f qu'elle admet n dérivées de La Vallée Poussin (Marcinkiewicz et Zygmund) $\varphi_i(x)$ au point x si :

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + \varphi_1(x)h + \varphi_2(x)\frac{h^2}{2!} + \dots + \varphi_n(x)\frac{h^n}{n!} + o(h^n) .$$

THEOREME. Si f admet n dérivées de La Vallée Poussin continues sur un ouvert, alors f est de classe C^n et les dérivées de La Vallée Poussin sont les dérivées habituelles.

Avant de démontrer ce théorème il faut passer par quelques préliminaires.

2. On pose $\Delta f(x,h) = \Delta_x f(h) = f(x+h) - f(x)$ et, plus généralement,

$$\Delta^p f(x,h) = \sum_0^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(x+ih)$$

Ce sont les différences successives habituelles. Calculons, pour voir, $\Delta^3 f(x+3h,-h)$. C'est $f(x+3h-3h) - 3f(x+3h-2h) + 3f(x+3h-h) - f(x+3h)$ soit $-\Delta^3 f(x,h)$. On admettra que $\Delta^p f(x+ph,-h) = (-1)^p \Delta^p f(x,h)$.

3. Exprimons maintenant ces différences en utilisant la relation (1) .

$$\Delta^1 f(x,h) = \varphi_1(x)h + \varphi_2(x)\frac{h^2}{2!} + o(h^2).$$

$$\Delta^2 f(x,h) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= f(x) + 2\,\varphi_1(x)\,h + 4\,\varphi_2(x)\frac{h^2}{2!} + 8\,\varphi_3(x)\frac{h^3}{3!} + \dots \\
&- 2f(x) - 2\,\varphi_1(x)\,h - 2\,\varphi_2(x)\frac{h^2}{2!} - 2\,\varphi_3(x)\frac{h^3}{3!} + \dots \\
&+ f(x) \\
&= \varphi_2(x)\,h^2 + \varphi_3(x)\,h^3 + o(h^3) .
\end{aligned}$$

Plus généralement $(p < n)$:

$$\Delta^p f(x,h) = \sum_{p}^{0} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} f(x+ih)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\sum_{i=p}^{i=0} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^k \right) \varphi_k(x) \frac{h^k}{k!}$$

$$= \varphi_p(x)h^p + \frac{p}{2} \varphi_{p+1}(x) h^{p+1} + o(h^{p+1})$$

Comme il resulte du

<u>LEMME.</u>

$$\sum_{i=p}^{i=0} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^k = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq k < p \\ p' & \text{si } k = p , \\ \frac{p}{2} (p+1)!) & \text{si } k = p+1 . \end{cases}$$

<u>Démonstration du lemme.</u> Considérons la formule du binôme $(x-1)^p = \sum_{i=p}^{i=0} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} x^i$. Pour obtenir des puissances k^a de i , on va dériver par rapport à x :

$$\frac{d}{dx} (x-1)^p = \sum_{i=p}^{i=0} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i\, x^{i-1} = p(x-1)^{p-1}$$

donc $(p > 1)$, en faisant $x = 1$,

$$\sum_{i=p}^{i=0} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i = 0$$

Pour pouvoir itérer le procédé on récupère l'exposant i en multipliant par x. Finalement $(k \leq p)$

$$(x \frac{d}{dx})^k (x-1)^p = \sum_{i=p}^{i=0} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^k x^i$$

$$= x^k p(p-1) \ldots (p-k-1)(x-1)^{p-k}$$

$$+ (1+2+ \ldots +(k-1) x^k p(p-1), \ldots (p-k+2)(x-1)^{p-k+1}$$

$$+ A(x-1)^{p-k+2}$$

Donc si $k < p$, $\sum (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^k = 0$, tandis que si $k = p$, $\sum (-1)^{p-i} \binom{p}{i} i^k = p\,!$ le premier terme étant le seul à ne pas s'annuler à ce stade. En dérivant $(x \frac{d}{dx})^p (x-1)^p$ il vient $p\, x^{p-1}\, p! + (1 + 2 + \ldots + (p-1)\,)\, x^{p-1}\, p! + B(x-1)$ qui vaut, pour $x=1$, $\frac{p(p+1)}{2}\, p!$

4. <u>Démonstration du théorème.</u> On a :

$$\Delta^p f(x,h) - (-1)^p \Delta^p f(x+ph,-h) = 0$$

d'où, par les développements calculés en A.7.3,

$$\left(\varphi_p(x+ph) - \varphi_p(x)\right) h^p = \frac{p}{2} \left(\varphi_{p+1}(x+ph) + \varphi_{p+1}(x)\right) h^{p+1} + o(h^{p+1}) ,$$

soit, en divisant par h^p ,puis en substituant h à ph

$$\varphi_p(x+h) - \varphi_p(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi_{p+1}(x+h) + \varphi_{p+1}(x)\right) h + o(h)$$

Alors $\varphi_p(x+h) - \varphi_p(x) = \varphi_{p+1}(x)h + \frac{1}{2} \left(\varphi_{p+1}(x+h) - \varphi_{p+1}(x)\right) h + o(h)$.

Dans le second membre, le premier terme est linéaire en h tandis que le second, par la continuité de φ_{p+1}, est un $o(h)$. Donc φ_{p+1} est la dérivée, au sens habituel, de φ_p .

BIBLIOGRAPHIE.

Ralph Abraham & Joël Robbin, Transversal mappings and flows, Benjamin, New York & Amsterdam, 1967.

G.P. Akilov, V. Kantorovitch & Akilov.

V.I. Averbukh & O.G. Smoljanov, (en russe), Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. 173 (1967), 735-738, alias Differentiation in linear topological spaces, Soviet Math.-Dokl. 8(1967), 444-448.

Andrée Bastiani, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, J. Anal. Math. 13(1964), 1-114.

Ernst Binz, Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vekotrräumen, Comm. Math. Helv. 41(1966-67), 137-156.

Ernst Binz & H.H. Keller, Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume, Ann.Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I 383 (1966).

Ernst Binz & W. Meier-Solfrian, Zur Differentialrechnung in limitierten Vektorräumen, Comm.Math. Helv. 42(1967), 285-296.

Nicolas Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3, 4 et 5 (fascicule 18 des Eléments), A.S.I. 1229, Hermann, Paris, 1955.

Willi Bucher, Différentiabilité de la composition et complétitude de certains espaces fonctionnels, Comm.Math.Helv. 43(1968), 256-288.

Willi Bucher, v. Frölicher & Bucher.

H. Buchwalter, Espaces vecotirels bornologiques, Publ.Dép.Math. Lyon 2(1965) (fasc.1), 2-53.

Gustave Choquet, Convergences, Ann. Univ. Grenoble 23(1947-48), 57-112.

Jean Dieudonné, Foundations of modern analysis, Academic Press, New York, 1960, alias Fondements de l'analyse moderne, Cahiers scientifiques 28, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

James Eells, Jr., A setting for global analysis, Bull.A.M.S. 72(1966), 751-807.

Peter L. Falb & Marc Q. Jacobs, On differentials in locally convex spaces, J.Diff.Equ. 4(1968), 444-459.

H.R. Fischer, Differentialkalkül für nicht-metrische Strukturen, Ann.Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. 247(1957).

H.R. Fischer, Limesräume, Math. Annalen 137(1959), 269-303.

A. Frölicher & W. Bucher, Calculus in vector spaces without norm, Lecture Notes in Math. 30, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

Werner Gähler, Eine Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit I, Math. Nachr. 38(1968), 217-256.

Jesus Gil de Lamadrid, Topology of mappings in locally convex topological vector spaces, their differentiation and integration, and applications to gradient mappings, Thesis, University of Michigan, 1955.

Jesus Gil de Lamadrid, Topology of mappings and differentiation processes, Illinois J. Math. 3(1959), 408-420.

G. Grimeisen, Das Produkt topologischer Räume in einer Theorie der Limesräume, Math. Z. 82(1963), 361-378.

Alexandre Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, 3.a edição Publ.Soc.math. São Paulo, São Paulo, 1964.

Alexandre Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil. Math. 3(1952-54?)(fasc. 6, décembre 1954), 57-122.

Klaus Harbarth, Über die Äquivalenz verschiedener Axiomensysteme für Limesräume, Math. Nachr. 17(1959), 261-272.

Marc Q. Jacobs, v. Falb & Jacobs.

L.V. Kantorovich & G.P. Akilov, Functional analysis in normed spaces, Internat. Series of Monographs in Pure & Appl. Math. 46, Pergamon Press, London, 1964.

H.H. Keller, Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen, Comm. Math. Helv. 38(1963-64), 308-320.

H.H Keller, Über Probleme, die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten, in : Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna, pp.49-57, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

H.H. Keller, v. Binz & Keller.

John L. Kelley & Isaku Namioka, Linear topological espaces, Univ. series in higher math., Van Nostrand, Princeton, 1963.

H.J. Kowalsky, Limesräume und Kompletierung, Math.Nachr. 13(1955), 169-185.

Charles J. de La Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, Librairie Universitaire, Louvain, Gauthier-Villars, Paris, nombreuses éditions.

J. Marcinkiewicz & A. Zygmund, On the differentiability of functions and summability of trigonometric series, Fund. Math. 26(1936),1-43.

W. Meier-Solfrian, v. Binz & Meier-Solfrian.

Aristotle D. Michal, First-order differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups, Revista de Ciencias 47(1945), 389-422.

Isaku Namioka, v. Kelley & Namioka.

Joel Robbin, v. Abraham & Robbin.

Helmut H. Schaefer, Topological vector spaces, Macmilan, New York 1966.

Jose Sebastião e Silva, Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni, Rend. Mat. e Appl. (5)14 (1955), 388-410.

Jose Sebastião e Silva, Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, I & II, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis.Mat. Natur. (8)20(1956), 753-760 & (8)21(1956), 40-46.

Jose Sebastião e Silva, Conceitos de função deferentiavel en espaços localmente convexos, Publ. Centro de Estudos Mat. Lisboa, Instituto de Alta Cultura, Lisboa, 1957.

Jose Sebastião e Silva, Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable, Colloque C.B.R.M. Analyse fonctionnelle Louvain 1960, pp.57-61, Librairie Universitaire, Louvain, Gauthier-Villars, Paris, 1961.

Jose Sebastiao e Silva, Les espaces à bornés et les réunions d'espaces normés, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl.Sci.Fis.Mat.Natur. (8)34(1963), 134-137.

Boris Sjöberg, (en suédois : sur les dérivées dans les espaces vectoriels topologiques), Nordisk Mat. Tidskr. 14(1966), 87-96.

O.G. Smoljanov, v. Averbuhk & Smoljanov.

H. Sonner, Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen, Arch. Math. 4(1953), 461-469.

M.M. Vainberg, (en russe), Moscou, 1956, alias Variational methods for the study of non linear operators, Holden-Day, San Francisco, 1964.

Paul Ver Eecke, Surle calcul différentiel dans les espaces non normés, C.R. Acad. Sc. Paris (A)265(1967), 720-723.

Paul Ver Eecke, Calcul différentiel, tome I, C.D.U., Paris, 1969.

Lucien Waelbroeck, Les espaces à bornés complets, Colloque C.B.R.M. analyse fonctionnelle Louvain 1960, pp.51-55, Librairie Universitaire, Louvain, Gauthier-Villars, Paris, 1961.

Lucien Waelbroeck, Le complété et le dual d'un espace "à bornés", C.R. Acad. Sc. Paris (A)253(1961), 2827-2828.

Lucien Waelbroeck, Some theorems about bounded structures, J. Functional Analysis 1 (1967), 392-408.

A. Zygmund, v. Marcinkiewicz & Zygmund.

Séminaire Banach, Ecole Normale Supérieure, Paris, 1962.

Bibliothèque des
Sciences Exactes

Université catholique de Louvain

10.474.135