Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences [...]

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Fonctions implicites, non locales, dans les espaces localement convexes.* Note (*) de M. **Dominique Meeùs**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Suite d'une Note antérieure [3]. Théorème du point fixe à un paramètre et théorèmes d'existence, non locale, et de différentiabilité de la solution d'un problème de fonction implicite entre des espaces localement convexes.

1. Introduction. — On connaît des applications d'un espace de Fréchet dans un autre qui ne sont pas, soit localement injective [1], soit localement surjective [2], tandis qu'elles sont de classe C^∞ pour toute définition raisonnable de la dérivée et que leur dérivée à l'origine soit l'identité. En particulier, elles sont de classe bC^∞ au sens d'une Note précédente [3] dont nous reprenons la terminologie. Le théorème des fonctions implicites classique est un résultat local qui ne s'étend donc pas aux espaces localement convexes même métrisables et complets. Les résultats que nous donnons ici concernent des généralisations non locales du théorème des fonctions implicites et de ses corollaires.

Dans ce qui suit, E, F et G désignent des espaces localement convexes séparés réels. Si B est un disque borné dans F nous posons, pour $x \in \mathrm{F}$,

$$\| x \|_{\mathrm{B}} = \inf \left\{ \lambda > 0 \;\middle|\; \frac{x}{\lambda} \in \mathrm{B} \right\}.$$

La quantité $\| x \|_{\mathrm{B}}$ est finie si et seulement si x appartient au sous-espace F_{B} engendré vectoriellement par B. La même notation F_{B} désignera ce sous-espace muni de la norme $\| \ \|_{\mathrm{B}}$. La topologie induite sur B par celle de F_{B} est appelée la *topologie propre* de B.

2. Proposition 2.1 (*Théorème du point fixe à un paramètre*). — *Soient g une application continue d'une partie de* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *dans* F *et* (x_0, y_0) *un point de* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *tel que* $g(x_0, y_0) = y_0$. *S'il existe un ensemble* A *dans* E, *un disque borné* B *dans* F, *complet pour sa topologie propre, et un nombre réel positif* $k < 1$ *tels que g soit définie sur* $(x_0 + \mathrm{A}) \times (y_0 + \mathrm{B})$ *et que, pour tous* $x \in x_0 + \mathrm{A}$, y *et* $y' \in y_0 + \mathrm{B}$,

$$g(x, y) \in y_0 + \mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \| g(x, y) - g(x, y') \|_{\mathrm{B}} \leq k \| y - y' \|_{\mathrm{B}},$$

alors il existe une et une seule application u de $x_0 + \mathrm{A}$ *dans* $y_0 + \mathrm{B}$, *continue pour les topologies de* E *et de* F, *telle que* $u(x_0) = y_0$ *et*

$$u(x) = g(u(x))$$

pour tout $x \in x_0 + \mathrm{A}$.

On remarquera que l'hypothèse de complétion sur B est réalisée si elle l'est dans la topologie de F pour les suites d'éléments de B.

3. Théorème 3.1 (*Théorème des fonctions implicites*). — *Soient f une application continue d'une partie de* $E \times F$ *dans* F *et* (x_0, y_0) *un point de* $E \times F$ *où f s'annule. S'il existe un ensemble* A *dans* E, *un disque borné* B *dans* F, *complet pour sa topologie propre, et un nombre réel positif $k < 1$ tels que f soit définie sur* $(x_0 + A) \times (y_0 + B)$ *et que, pour tous $x \in x_0 + A$, y et $y' \in y_0 + B$,*

$$f(x, y_0) \in B(1-k) \quad \text{et} \quad \| y - y' - f(x, y) + f(x, y') \|_B \leq k \| y - y' \|_B,$$

alors il existe une et une seule application u de $x_0 + A$ dans $y_0 + B$, continue, telle que $u(x_0) = y_0$ et

$$f(x, u(x)) = 0$$

pour tout $x \in x_0 + A$.

Corollaire 3.2 (*Théorème de la fonction réciproque*). — *Soient v une application continue d'une partie de* F *dans* F *et x_0 l'image d'un point y_0 de* F. *S'il existe un disque borné* B *dans* F, *complet pour sa topologie propre, et un nombre réel positif $k < 1$ tels que v soit définie sur $y_0 + B$ et que, pour tous y et $y' \in y_0 + B$,*

$$\| y - y' - v(y) + v(y') \|_B \leq k \| y - y' \|_B,$$

alors il existe une et une seule application u de $x_0 + B(1-k)$ dans $y_0 + B$, continue, telle que $u(x_0) = y_0$ et

$$v(u(x)) = x$$

pour tout $x \in x_0 + B(1-k)$.

4. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites ci-dessus à une fonction f à valeurs dans un troisième espace G si l'on dispose d'un isomorphisme entre les espaces F et G. C'est ce rôle que joue la dérivée partielle de f par rapport à y dans le théorème suivant sur la différentiabilité de la solution.

Théorème 4.1. — *Soit f une fonction définie sur une partie de* $E \times F$, *à valeurs dans* G, *qui s'annule en (x_0, y_0), et qui admet des dérivées partielles* (bS) *en ce point, la seconde, $(\partial f / \partial y)(x_0, y_0)$, étant une bijection de* F *sur* G *bornée ainsi que son inverse. Soit u une application d'une partie $x_0 + A$ de* E *dans* F, *b-continue et telle que $u(x_0) = y_0$ et $f(x, u(x)) = 0$ pour tout $x \in x_0 + A$.*

Si, pour tout disque borné B *dans* F *et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in x_0 + A$ et tout $h \in F$ avec $\| h \|_B \leq \delta$*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(h) - f(x, y_0 + h) + f(x, y_0) \right\|_{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(B)} \leq \varepsilon \| h \|_B, \tag{1}$$

alors u est dérivable (bS) en x_0 et une dérivée en est donnée par la relation

$$u'(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

COROLLAIRE 4.2. — *Soient v une fonction définie sur une partie de* F, *à valeurs dans* E, *et x_0 l'image d'un point y_0 de* F. *Supposons que v admet pour dérivée* (bS) *en y_0 une bijection $v'(y_0)$ de* F *sur* E, *bornée ainsi que son inverse. Soit u une application d'une partie $x_0 + \mathrm{A}$ de* E *dans* F, *b-continue et telle que $u(x_0) = y_0$ et $v(u(x)) = x$ pour tout $x \in x_0 + \mathrm{A}$.*

Si, pour tout disque borné B *dans* F *et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in \mathrm{F}$, avec $\| h \|_{\mathrm{B}} \leq \delta$,*

$$\| v'(y_0)(h) - v(y_0 + h) + v(y_0) \|_{v'(y_0)(\mathrm{B})} \leq \varepsilon . \| h \|_{\mathrm{B}},$$

alors u est dérivable (bS) *en x_0 et une dérivée en est donnée par la relation*

$$u'(x_0) = v'(y_0)^{-1}.$$

Une difficulté apparaît lorsque l'on rapproche le théorème d'existence et le théorème de différentiabilité de la solution. Le premier fournit des solutions continues tandis que le second ne s'applique qu'aux solutions b-continues. Cependant la solution est bornée sur les bornés dans le théorème d'existence et, pour ces fonctions, la continuité entraîne la b-continuité pourvu que dans l'espace où elles prennent leurs valeurs tout filtre tendant vers zéro et comprenant un ensemble borné, tende vers zéro au sens de Mackey. Cette dernière condition est réalisée dans les espaces localement convexes métrisables.

(*) Séance du 1er mars 1971.

(1) H. H. KELLER, Beispiel 5, dans *Comm. Math. Helv.*, 38, 1963-1964, p. 319.
(2) JAMES EELLS Jr, Example, dans *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, 1966, p. 761.
(3) *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 1250.

(*Institut mathématique de l'Université catholique de Louvain, avenue des Célestins*, 200 B, B-3030 *Heverlee, Belgique.*)