Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences [...]

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la dérivée d'une fonction entre parties d'espaces localement convexes.* Note (*) de M. **Dominique Meeùs**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Infiniment petits de types (S) et (G) et conditions assurant leur équivalence. Notions de dérivées (S), (G), (bS) et (bG), d'une fonction $f: A \to F$, $A \subseteq E$, où E et F sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés réels. Condition suffisante pour qu'une telle fonction soit bornée. Théorème de composition de fonctions de classe C^1 et réciproque du théorème de Taylor.

Dans cette Note, E, F et G désignent des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés réels. Nous dirons qu'un ensemble A *absorbe* un ensemble B dans l'espace E s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $[0, \delta] B \subseteq A$. L'ensemble A est dit *localement générateur* dans E lorsque, pour tout $a \in A$, l'ensemble $A - a$ absorbe les points d'une partie génératrice de E. Un ensemble U est dit *bornivore dans* A si, pour tout borné B, il existe un $\delta > 0$ tel que $([0, \delta] B) \cap A \subseteq U$.

1. Infiniment petits et dérivée. — Soit r une application d'une partie A de E dans F. On dira que r est un *infiniment petit de type* (S) [respectivement *de type* (G)] lorsque la condition suivante est remplie :

(S) $\lim_{t \to 0,\, t > 0} r(th)/t = 0$ *en convergence de Mackey dans* F *uniformément en h sur les bornés de* E

[resp. (G) $\lim_{t \to 0,\, t > 0} r(th)/t = 0$ *dans la topologie de* F *uniformément en h sur les bornés de* E].

On voit que (S) implique (G). Il est utile de disposer de conditions donnant lieu à l'implication réciproque (le théorème 4.1 peut aussi être considéré de ce point de vue).

Théorème 1.1. — *Les notions d'infiniment petits de types* (S) *et* (G) *coïncident, lorsque sont vérifiées les propriétés suivantes :*

(i) *l'espace* F *admet une suite fondamentale de parties bornées, et*

(ii) *toute suite tendant vers zéro dans la topologie de* F *converge vers zéro au sens de Mackey.*

Ces hypothèses sont vérifiées lorsque F est limite inductive stricte d'espaces normés ou encore, limite inductive d'une suite F_n d'espaces normés pour des injections $F_n \to F_{n+1}$ complètement continues (1).

Théorème 1.2. — *Soit r un infiniment petit de type* (G) *borné sur les bornés de* E. *C'est aussi un infiniment petit de type* (S) *lorsque l'espace* F *jouit de la propriété suivante : tout filtre sur* F *qui converge vers zéro dans la topologie de* F *et qui comprend un ensemble borné, converge aussi vers zéro au sens de Mackey.*

Cette condition sur F est vérifiée en particulier lorsque F est un espace localement convexe métrisable.

Définition 1.3. — Une application f d'une partie A de E dans F est dite *dérivable* (S) [resp. *dérivable* (G)] au point $a \in$ A lorsque, pour tout $h \in \mathrm{A} - a$, on peut écrire l'égalité

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + r(h)$$

dans laquelle :

(i) $f'(a)$ est une application linéaire continue de E dans F, et

(ii) r est infiniment petit de type (S) [resp. de type (G)].

On dit que $f'(a)$ est une *dérivée* (S) [resp. une *dérivée* (G)] de f en a. Lorsque l'on a une telle égalité dans laquelle $f'(a)$ est seulement bornée, au lieu de continue, on dit que la fonction f est *dérivable* (bS) [resp. *dérivable* (bG)].

La dérivée (bS) est celle de Sebastião e Silva [2]. C'est aussi celle de Frölicher et Bucher [3] relativement aux convergences de Mackey de E et de F. Elle ne dépend que des bornés des espaces E et F [4] et certaines de ses propriétés peuvent être établies dans le cadre des espaces à bornés abstraits.

La dérivée $f'(a)$, lorsqu'elle existe, est unique sur l'espace qu'engendrent les points absorbés par $\mathrm{A} - a$. Par ailleurs, la dérivabilité de f au point a ne dépend que de son comportement sur un ensemble de la forme $a + \mathrm{U}$, où U est bornivore dans $\mathrm{A} - a$.

2. Continuité pour les convergences de Mackey.

Définition 2.1. — Une application f d'une partie A de E dans F est dite *b-continue au point* $a \in$ A si elle est continue relativement aux convergences de Mackey de E et de F.

Cela revient à dire que la condition

$$\lim_{t \to 0,\, t > 0} f(a + th) - f(a) = 0$$

a lieu uniformément en h sur les bornés de E pour la convergence de Mackey de F.

Définition 2.2. — La fonction f est dite *b-continue uniformément sur les bornés d'un ensemble* A' contenu dans A, si la condition précédente a lieu uniformément en a sur les bornés de A'.

Une fonction dérivable (bS) en un point est b-continue en ce point.

THÉORÈME 2.3. — *Une fonction entre parties d'espaces localement convexes, b-continue uniformément sur les bornés d'un ensemble convexe, est bornée sur les bornés de cet ensemble.*

3. FONCTIONS COMPOSÉES.

PROPOSITION 3.1. — *Soient f une application d'une partie* A *de* E *dans* F *et g une application d'une partie* B *de* F *dans* G *et supposons* $f(A)$ *contenu dans* B. *Supposons en outre que les fonctions f et g soient toutes deux dérivables* (S) [*resp. dérivables* (*b*S)], *la première en* $a \in A$ *et la seconde en* $f(a)$. *Dans ces conditions, la fonction composée* $g \circ f$ *est dérivable* (S) [*resp. dérivable* (*b*S)] *en a, et de plus, si* $f'(a)$ *et* $g'(f(a))$ *sont des dérivées de f et g, une dérivée de* $g \circ f$ *est donnée par la formule*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Désignons par L(E, F) l'espace des applications linéaires bornées de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E et soit f une fonction à valeur dans F définie sur un ensemble A localement générateur dans E.

DÉFINITION 3.2. — Nous dirons que f est de *classe* bC^1 si elle est dérivable (bS) en chaque point de A et si la fonction dérivée f' est b-continue comme fonction à valeurs dans L(E, F).

THÉORÈME 3.3. — *Le composé de deux fonctions définies sur des ensembles localement générateurs et de classe* bC^1 *est une fonction de classe* bC^1.

4. RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE TAYLOR. — Soit f une application dans F d'un ensemble A localement générateur dans E. La *dérivée* $n^{ième}$ est définie par dérivations successives comme une fonction à valeurs dans l'espace $L(E; L(E; \ldots; L(E; F) \ldots))$ que l'on peut identifier à l'espace $L^n(E; F)$ des applications n-linéaires bornées de E dans F pour la topologie de la convergence bornée. C'est en fait une fonction à valeurs dans le sous-espace $L^n_s(E; F)$ des applications n-linéaires bornées symétriques. Le théorème de Taylor est connu pour les dérivées (bS) (2) et (bG) (5). Nous en donnons ici la réciproque. Si l est n-linéaire symétrique, nous écrivons $l(h)^n$ pour $l(h, \ldots, h)$.

THÉORÈME 4.1. — *Soit f une fonction à valeurs dans l'espace* F *supposé quasi-complet, définie sur un convexe localement générateur* A *de* E; *soient, en outre,* l_k *des applications de* A *dans* $L^k_s(E; F)$. *Supposons f et les* l_k *continues* [*resp. b-continues*] *et telles que*

$$f(a+h) - f(a) = l_1(a)(h) + \frac{1}{2} l_2(a)(h)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} l_n(a)(h)^n + r(a, h),$$

avec pour tout a,

$$\lim_{\substack{t \to 0,\, t > 0 \\ x \to a}} \frac{r(x, th)}{t^n} = 0$$

uniformément en h sur les bornés de E, *dans la topologie de* F. *Alors f est n fois dérivable* (bG) [*resp. dérivable* (bS)] *et ses dérivées sont données par la formule*

$$f^{(k)} = l_k.$$

(*) Séance du 30 novembre 1970.

(1) L. V. Kantorovich et G. P. Akilov, *Functional Analysis in Normed Spaces*, Internat. Series of Monographs in Pure and Appl. Math., 46, Pergamon Press, London, 1964, XI.5.10 et XI.5.12.

(2) J. Sebastião e Silva, *Atti. Accad. Naz. Lincei*, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., série 8, 20, 1956, p. 743-750 et 21, 1956, p. 40-46.

(3) A. Frölicher et W. Bucher, *Calculus in Vector Spaces without Norm*, Lecture Notes in Math., 30, 1966.

(4) J. Sebastião e Silva, *Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable*, Colloque du C. B. R. M. sur l'Analyse fonctionnelle, à Louvain, en 1960, p. 57; Louvain et Paris, 1961.

(5) V. I. Averbuh et O. G. Smoljanov, *Soviet Math. Dokl.*, 8, 1967, p. 444-448.

(*Institut mathématique de l'Université catholique de Louvain, avenue des Célestins* 200 *b*, 3030-*Heverlee, Belgique.*)