

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences.
Séries A et B, Sciences
mathématiques et Sciences
[...]

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques. 1970-12-21.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la dérivée d'une fonction entre parties d'espaces localement convexes.* Note (*) de M. DOMINIQUE MEEÛS, présentée par M. André Lichnerowicz.

Infiniment petits de types (S) et (G) et conditions assurant leur équivalence. Notions de dérivées (S), (G), (bS) et (bG), d'une fonction $f: A \rightarrow F$, $A \subseteq E$, où E et F sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés réels. Condition suffisante pour qu'une telle fonction soit bornée. Théorème de composition de fonctions de classe C^1 et réciproque du théorème de Taylor.

Dans cette Note, E, F et G désignent des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés réels. Nous dirons qu'un ensemble A absorbe un ensemble B dans l'espace E s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $[0, \delta]B \subseteq A$. L'ensemble A est dit *localement générateur* dans E lorsque, pour tout $a \in A$, l'ensemble $A - a$ absorbe les points d'une partie génératrice de E. Un ensemble U est dit *bornivore dans A* si, pour tout borné B, il existe un $\delta > 0$ tel que $([0, \delta]B) \cap A \subseteq U$.

1. INFINIMENT PETITS ET DÉRIVÉE. — Soit r une application d'une partie A de E dans F. On dira que r est un *infiniment petit de type (S)* [respectivement *de type (G)*] lorsque la condition suivante est remplie :

(S) $\lim_{t \rightarrow 0, h \rightarrow 0} r(th)/t = 0$ en convergence de Mackey dans F uniformément en h sur les bornés de E
[resp. (G) $\lim_{t \rightarrow 0, h \rightarrow 0} r(th)/t = 0$ dans la topologie de F uniformément en h sur les bornés de E].

On voit que (S) implique (G). Il est utile de disposer de conditions donnant lieu à l'implication réciproque (le théorème 4.1 peut aussi être considéré de ce point de vue).

THÉORÈME 4.1. — *Les notions d'infiniment petits de types (S) et (G) coïncident, lorsque sont vérifiées les propriétés suivantes :*

- (i) *l'espace F admet une suite fondamentale de parties bornées, et*
- (ii) *toute suite tendant vers zéro dans la topologie de F converge vers zéro au sens de Mackey.*

Ces hypothèses sont vérifiées lorsque F est limite inductive stricte d'espaces normés ou encore, limite inductive d'une suite F_n d'espaces normés pour des injections $F_n \rightarrow F_{n+1}$ complètement continues ⁽¹⁾.

THÉORÈME 1.2. — Soit r un infiniment petit de type (G) borné sur les bornés de E . C'est aussi un infiniment petit de type (S) lorsque l'espace F jouit de la propriété suivante : tout filtre sur F qui converge vers zéro dans la topologie de F et qui comprend un ensemble borné, converge aussi vers zéro au sens de Mackey.

Cette condition sur F est vérifiée en particulier lorsque F est un espace localement convexe métrisable.

DÉFINITION 1.3. — Une application f d'une partie A de E dans F est dite *dérivable* (S) [resp. *dérivable* (G)] au point $a \in A$ lorsque, pour tout $h \in A - a$, on peut écrire l'égalité

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + r(h)$$

dans laquelle :

- (i) $f'(a)$ est une application linéaire continue de E dans F , et
- (ii) r est infiniment petit de type (S) [resp. de type (G)].

On dit que $f'(a)$ est une *dérivée* (S) [resp. une *dérivée* (G)] de f en a . Lorsque l'on a une telle égalité dans laquelle $f'(a)$ est seulement bornée, au lieu de continue, on dit que la fonction f est *dérivable* (bS) [resp. *dérivable* (bG)].

La dérivée (bS) est celle de Sebastião e Silva ⁽²⁾. C'est aussi celle de Frölicher et Bucher ⁽³⁾ relativement aux convergences de Mackey de E et de F . Elle ne dépend que des bornés des espaces E et F ⁽⁴⁾ et certaines de ses propriétés peuvent être établies dans le cadre des espaces à bornés abstraits.

La dérivée $f'(a)$, lorsqu'elle existe, est unique sur l'espace qu'engendrent les points absorbés par $A - a$. Par ailleurs, la dérivabilité de f au point a ne dépend que de son comportement sur un ensemble de la forme $a + U$, où U est bornivore dans $A - a$.

2. CONTINUITÉ POUR LES CONVERGENCES DE MACKEY.

DÉFINITION 2.1. — Une application f d'une partie A de E dans F est dite *b-continue au point* $a \in A$ si elle est continue relativement aux convergences de Mackey de E et de F .

Cela revient à dire que la condition

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(a + th) - f(a) = 0$$

a lieu uniformément en h sur les bornés de E pour la convergence de Mackey de F .

DÉFINITION 2.2. — La fonction f est dite *b-continue uniformément sur les bornés d'un ensemble* A' contenu dans A , si la condition précédente a lieu uniformément en a sur les bornés de A' .

Une fonction dérivable (bS) en un point est *b-continue* en ce point.

THÉORÈME 2.3. — Une fonction entre parties d'espaces localement convexes, b -continue uniformément sur les bornés d'un ensemble convexe, est bornée sur les bornés de cet ensemble.

3. FONCTIONS COMPOSÉES.

PROPOSITION 3.1. — Soient f une application d'une partie A de E dans F et g une application d'une partie B de F dans G et supposons $f(A)$ contenu dans B . Supposons en outre que les fonctions f et g soient toutes deux dérivables (S) [resp. dérivables (bS)], la première en $a \in A$ et la seconde en $f(a)$. Dans ces conditions, la fonction composée $g \circ f$ est dérivable (S) [resp. dérivable (bS)] en a , et de plus, si $f'(a)$ et $g'(f(a))$ sont des dérivées de f et g , une dérivée de $g \circ f$ est donnée par la formule

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Désignons par $L(E, F)$ l'espace des applications linéaires bornées de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E et soit f une fonction à valeur dans F définie sur un ensemble A localement générateur dans E .

DÉFINITION 3.2. — Nous dirons que f est de classe bC^1 si elle est dérivable (bS) en chaque point de A et si la fonction dérivée f' est b -continue comme fonction à valeurs dans $L(E, F)$.

THÉORÈME 3.3. — Le composé de deux fonctions définies sur des ensembles localement générateurs et de classe bC^1 est une fonction de classe bC^1 .

4. RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE TAYLOR. — Soit f une application dans F d'un ensemble A localement générateur dans E . La dérivée $n^{\text{ième}}$ est définie par dérivations successives comme une fonction à valeurs dans l'espace $L(E; L(E; \dots; L(E; F) \dots))$ que l'on peut identifier à l'espace $L^n(E; F)$ des applications n -linéaires bornées de E dans F pour la topologie de la convergence bornée. C'est en fait une fonction à valeurs dans le sous-espace $L_s^n(E; F)$ des applications n -linéaires bornées symétriques. Le théorème de Taylor est connu pour les dérivées (bS) ⁽²⁾ et (bG) ⁽⁵⁾. Nous en donnons ici la réciproque. Si l est n -linéaire symétrique, nous écrivons $l(h)^n$ pour $l(h, \dots, h)$.

THÉORÈME 4.1. — Soit f une fonction à valeurs dans l'espace F supposé quasi-complet, définie sur un convexe localement générateur A de E ; soient, en outre, l_k des applications de A dans $L_s^k(E; F)$. Supposons f et les l_k continues [resp. b -continues] et telles que

$$f(a+h) - f(a) = l_1(a)(h) + \frac{1}{2} l_2(a)(h)^2 + \dots + \frac{1}{n!} l_n(a)(h)^n + r(a, h),$$

avec pour tout a ,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0, t > 0 \\ x \rightarrow a}} \frac{r(x, th)}{t^n} = 0$$

uniformément en h sur les bornés de E , dans la topologie de F . Alors f est n fois dérivable (bG) [resp. dérivable (bS)] et ses dérivées sont données par la formule

$$f^{(k)} = l_k.$$

(*) Séance du 30 novembre 1970.

(1) L. V. KANTOROVICH et G. P. AKILOV, *Functional Analysis in Normed Spaces*, Internat. Series of Monographs in Pure and Appl. Math., 46, Pergamon Press, London, 1964, XI.5.10 et XI.5.12.

(2) J. SEBASTIÃO E SILVA, *Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, série 8, 20, 1956, p. 743-750 et 21, 1956, p. 40-46.

(3) A. FRÖLICHER et W. BUCHER, *Calculus in Vector Spaces without Norm*, Lecture Notes in Math., 30, 1966.

(4) J. SEBASTIÃO E SILVA, *Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable*, Colloque du C. B. R. M. sur l'Analyse fonctionnelle, à Louvain, en 1960, p. 57; Louvain et Paris, 1961.

(5) V. I. AVERBUH et O. G. SMOLJANOV, *Soviet Math. Dokl.*, 8, 1967, p. 444-448.

(Institut mathématique
de l'Université catholique de Louvain,
avenue des Célestins 200 b,
3030-Heverlee, Belgique.)